गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 5x - 3, x = 0, x = -3$ तथा $x = 5$ पर संतत है।

उत्तर 1:

दिया गया फलन $f(x) = 5x - 3$

$x = 0$ पर, $f(0) = 5(0) - 3 = -3$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (5x - 3) = -3$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (5x - 3) = -3$

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0) = -3$

अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत है।

$x = -3$ पर, $f(-3) = 5(-3) - 3 = -18$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (5x - 3) = -18$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (5x - 3) = -18$

यहाँ, $x = -3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(-3) = -18$

अतः, $x = -3$ पर, फलन f संतत है।

$x = 5$ पर, $f(5) = 5(5) - 3 = 22$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (5x - 3) = 22$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (5x - 3) = 22$

यहाँ, $x = 5$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(5) = 22$

अतः, $x = 5$ पर, फलन f संतत है।

प्रश्न 2:

$x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

उत्तर 2:

दिया गया फलन $f(x) = 2x^2 - 1$

$x = 3$ पर, $f(3) = 2(3)^2 - 1 = 17$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x^2 - 1) = 17$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (2x^2 - 1) = 17$

यहाँ, $x = 3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(3) = 17$

अतः, $x = 3$ पर, फलन f संतत है।

प्रश्न 3:

निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए:

(a) $f(x) = x - 5$ **(b)** $f(x) = \frac{1}{x-5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$ **(d)** $f(x) = |x - 5|$

उत्तर 3:

(a) दिया गया फलन $f(x) = x - 5$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है।

$x = k$ पर, $f(k) = k - 5$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} (x - 5) = k - 5$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} (x - 5) = k - 5$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(k) = k - 5$

अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

(b) दिया गया फलन $f(x) = \frac{1}{x-5}, x \neq 5$

माना, k $(k \neq 5)$ कोई वास्तविक संख्या है।

$x = k$ पर, $f(k) = \frac{1}{k-5}$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} \left(\frac{1}{x-5}\right) = \frac{1}{k-5}$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} \left(\frac{1}{x-5}\right) = \frac{1}{k-5}$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(k) = \frac{1}{k-5}$

अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं (5 के अतिरिक्त) के लिए संतत है।

(c) दिया गया फलन $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$

माना, k $(k \neq -5)$ कोई वास्तविक संख्या है।

$x = k$ पर, $f(k) = \frac{k^2-25}{k+5} = \frac{(k+5)(k-5)}{(k+5)} = (k + 5)$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} \left(\frac{x^2-25}{x+5}\right) = \lim_{x \to k^-} \left(\frac{(k+5)(k-5)}{(k+5)}\right) = k + 5$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} \left(\frac{x^2-25}{x+5}\right) = \lim_{x \to k^+} \left(\frac{(k+5)(k-5)}{(k+5)}\right) = k + 5$

यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(k) = k + 5$

अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं (– 5 के अतिरिक्त) के लिए संतत है।

(d) दिया गया फलन $f(x) = |x - 5| = \begin{cases} 5 - x, & x < 5 \\ x - 5, & x \geq 5 \end{cases}$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 5$ या $k = 5$ या $k > 5$

पहली स्थिति: यदि, $k < 5$,

$f(k) = 5 - k$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} (5 - x) = 5 - k$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 5 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 5$,

$f(k) = k - 5$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} (x - 5) = k - 5$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 5 पर संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 5$,

$f(k) = k - 5$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} (x - 5) = k - 5$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 5 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

अतः, फलन f सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 4:
सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^n, x = n$ पर संतत है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

उत्तर 4:
दिया गया फलन $f(x) = x^n$

$x = n$ पर, $f(n) = n^n$

$$\lim_{x\to n} f(x) = \lim_{x\to n}(x^n) = n^n$$

यहाँ, $x = n$ पर, $\lim_{x\to n} f(x) = f(n) = n^n$

अतः, $x = n$ पर, जहाँ n एक धन पूर्णांक है, फलन f संतत है।

प्रश्न 5:
क्या $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन f, $x = 0, x = 1$, तथा $x = 2$ पर संतत है?

उत्तर 5:
दिया गया फलन $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases}$

$x = 0$ पर, $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x) = 0$$

यहाँ, $x = 0$ पर, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत है।

$x = 1$ पर, $f(1) = 1$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x) = 1$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(5) = 5$

यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा

अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

$x = 2$ पर, $f(2) = 5$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(5) = 5$$

यहाँ, $x = 2$ पर, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 5$

अतः, $x = 2$ पर, फलन f संतत है।

f के सभी असांतत्य के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जबकि f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है:

प्रश्न 6:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{यदि } x \le 2 \\ 2x - 3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

उत्तर 6:
माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 2$ या $k = 2$ या $k > 2$

पहली स्थिति: यदि, $k < 2$,

$f(k) = 2k + 3$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(2x + 3) = 2k + 3$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 2 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 2$ पर, $f(2) = 2k + 3$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x + 3\ ) = 7$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x - 3) = 1$
यहाँ, $x = 2$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा
अतः, $x = 2$ पर, फलन f संतत नहीं है।
तीसरी स्थिति: यदि, $k > 2$,
$f(k) = 2k - 3$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(2x - 3\ ) = 2k - 3$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, 2 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।
अतः, फलन f, $x = 2$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 7:

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 3, & \text{यदि } x \le -3 \\ -2x, & \text{यदि } -3 < x < 3 \\ 6x + 2, & \text{यदि } x \ge 3 \end{cases}$$

उत्तर 7:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार
$k < -3$ या $k = -3$ या $-3 < k < 3$ या $k = 3$ या $k > 3$
पहली स्थिति: यदि, $k < -3$,
$f(k) = -k + 3$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(-x + 3\ ) = \ -k + 3$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, – 3 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = -3$ पर, $f(-3) = -(-3) + 3 = 6$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (-x + 3\ ) = -(-3) + 3 = 6$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (-2x) = -2(-3) = 6$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $x = -3$ पर संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $-3 < k < 3$,
$f(k) = -2k$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(-2x\ ) = -2k$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $-3 < x < 3$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k = 3$ पर,
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^-} (-2x\ ) = -2k$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k^+} (6x + 2) = 6k + 2$,
यहाँ, $x = 3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा ≠ दाएँ पक्ष की सीमा,
अतः, $x = 3$ पर, फलन f संतत नहीं है।

पाँचवीं स्थिति: यदि, $k > 3$,
$f(k) = 6k + 2$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(6x + 2\ ) = 6k + 2$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, 3 से बड़ी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f, केवल $x = 3$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 8:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

उत्तर 8:

इस फलन f को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x} = -1, & \text{यदि } x < 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ \frac{x}{x} = 1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$f(k) = -\frac{k}{k} = -1$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$,

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0$,

$f(k) = \frac{k}{k} = 1$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, $x > 0$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f, केवल $x = 0$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 9:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{यदि } x < 0 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर 9:

इस फलन f को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1, & \text{यदि } x < 0 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k) = -1$, जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है।

इसप्रकार, फलन f, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 10:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{यदि } \geq 1 \\ x^2+1, & \text{यदि } x<1 \end{cases}$$

उत्तर 10:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k<1$ या $k=1$ या $k>1$

पहली स्थिति: यदि, $k<1$,

$f(k)=k^2+1$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(x^2+1) = k^2+1$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k=1$ पर, $f(1)=1+1=2$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 1+1=2$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 1+1=2$,

यहाँ, $x=1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(1)$

अतः, $x=1$ पर, फलन f संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k>1$,

$f(k)=k+1$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(x+1) = k+1$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, $x>1$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 11:

$$f(x) = \begin{cases} x^3-3, & \text{यदि } x\leq 2 \\ x^2+1, & \text{यदि } x>2 \end{cases}$$

उत्तर 11:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k<2$ या $k=2$ या $k>2$

पहली स्थिति: यदि, $k<2$,

$f(k)=k^3-3$तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(x^3-3) = k^3-3$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 2 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k=2$ पर, $f(2)=2^3-3=5$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^3-3) = 2^3-3=5$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2+1) = 2^2+1=5$,

यहाँ, $x=2$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(2)$

अतः, $x=2$ पर, फलन f संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k>2$,

$f(k)=k^2+1$ तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k}(x^2+1) = k^2+1$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, $x>2$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 12:

$$f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, \text{यदि } x \le 1 \\ x^2, \text{ यदि } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर 12:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 1$ या $k = 1$ या $k > 1$

पहली स्थिति: यदि, $k < 1$,
$f(k) = k^{10} - 1$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(x^{10} - 1) = k^{10} - 1$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, 1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 1$ पर, $f(1) = 1^{10} - 1 = 0$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(x^{10} - 1) = 0$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(x^2) = 1$,
यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा,
अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 1$,
$f(k) = k^2$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(x^2) = k^2$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $x > 1$, के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन f, केवल $x = 1$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 13:

क्या $f(x) = \begin{cases} x + 5, \text{यदि } x \le 1 \\ x - 5, \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन, एक संतत फलन है?

उत्तर 13:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 1$ या $k = 1$ या $k > 1$

पहली स्थिति: यदि, $k < 1$,
$f(k) = k + 5$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(x + 5) = k + 5$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, 1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 1$ पर, $f(1) = 1 + 5 = 6$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(x + 5) = 6$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(x - 5) = -4$,
यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा,
अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 1$,
$f(k) = k - 5$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(x - 5) = k - 5$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $x > 1$, के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन f, केवल $x = 1$ पर असांतत्य है।

फलन f, के सांतत्य पर विचार कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है:

प्रश्न 14:

$$f(x)=\begin{cases}3, \text{ यदि } 0\le x\le 1\\ 4, \text{ यदि } 1<x<3\\ 5, \text{ यदि } 3\le x\le 10\end{cases}$$

उत्तर 14:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार

$0\le k\le 1$ या $k=1$ या $1<k<3$ या $k=3$ या $3\le k\le 10$

पहली स्थिति: यदि, $0\le k\le 1$,

$f(k)=3$ तथा $\lim\limits_{x\to k}f(x)=\lim\limits_{x\to k}(3)=3$, यहाँ, $\lim\limits_{x\to k}f(x)=f(k)$

अतः, फलन f, $0\le x\le 1$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k=1$ पर, $f(1)=3$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3)=3$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(4)=4$,

यहाँ, $x=1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x=1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

तीसरी स्थिति: यदि, $1<k<3$,

$f(k)=4$ तथा $\lim\limits_{x\to k}f(x)=\lim\limits_{x\to k}(4)=4$, यहाँ, $\lim\limits_{x\to k}f(x)=f(k)$

अतः, फलन f, $1<x<3$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k=3$ पर,

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(4)=4$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(5)=5$,

यहाँ, $x=3$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा,

अतः, $x=3$ पर, फलन f संतत नहीं है।

पाँचवीं स्थिति: यदि, $3\le k\le 10$,

$f(k)=5$ तथा $\lim\limits_{x\to k}f(x)=\lim\limits_{x\to k}(5)=5$, यहाँ, $\lim\limits_{x\to k}f(x)=f(k)$

अतः, फलन f, $3\le x\le 10$ के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f, केवल $x=1$ तथा $x=3$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 15:

$$f(x)=\begin{cases}2x, \text{ यदि } x<0\\ 0, \text{ यदि } 0\le x\le 1\\ 4x, \text{ यदि } x>1\end{cases}$$

उत्तर 15:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k<0$ या $k=0$ या $0\le k\le 1$ या $k=1$ या $k>1$

पहली स्थिति: यदि, $k<0$,

$f(k) = 2k$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(2x) = 2k$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन $f,\ x < 0$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(2x) = 0$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(0) = 0$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन $f,\ x = 0$ के लिए संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $0 \le k \le 1$,
$f(k) = 0$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(0) = 0$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $0 \le x \le 1$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k = 1$ पर,
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(0) = 0$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(4x) = 4$,
यहाँ, $x = 1$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा,
अतः, $x = 1$ पर, फलन f संतत नहीं है।

पाँचवीं स्थिति: यदि, $k > 1$,
$f(k) = 4k$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(4x) = 4k$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन $f,\ x > 1$के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन f, केवल $x = 1$ पर असांतत्य है।

प्रश्न 16:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{यदि } x \le -1 \\ 2x, & \text{यदि } -1 < x \le 1 \\ 2, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

उत्तर 16:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है।
प्रश्नानुसार $k < -1$ या $k = -1$ या $-1 < x \le 1$ या $k = 1$ या $k > 1$
पहली स्थिति: यदि, $k < -1$,
$f(k) = -2$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(-2) = -2$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन $f,\ x < -1$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = -1$ पर, $f(-1) = -2$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-}(-2) = -2$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+}(2x) = -2$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन $f,\ x = -1$ के लिए संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $-1 < x \le 1$,

$f(k) = 2k$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(2x) = 2k$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $-1 < x \leq 1$, के लिए संतत है।

चौथी स्थिति: $k = 1$ पर,
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}(2x) = 2$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(2) = 2$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $x = 1$, के लिए संतत है।

पाँचवीं स्थिति: यदि, $k > 1$,
$f(k) = 2$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k}(2) = 2$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$
अतः, फलन f, $x > 1$ के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन f, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 17:

a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(x) = \begin{cases} ax + 1, \text{यदि } x \leq 3 \\ bx + 3, \text{यदि } x > 3 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 3$ पर संतत है।

उत्तर 17:

दिया है: फलन $x = 3$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(3)$
$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$
$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} ax + 1 = \lim_{x \to 3^+} bx + 3 = 3a + 1$
$\Rightarrow 3a + 1 = 3b + 3 = 3a + 1$
$\Rightarrow 3a = 3b + 2 \quad \Rightarrow a = b + \frac{2}{3}$

प्रश्न 18:

λ के किस मान के लिए $f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), \text{यदि } x \leq 0 \\ 4x + 1, \text{यदि } x > 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 0$ पर संतत है। $x = 1$ पर इसके सांतत्य पर विचार कीजिए।

उत्तर 18:

दिया है: फलन $x = 0$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0)$
$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$
$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \lambda(x^2 - 2x) = \lim_{x \to 0^+} 4x + 1 = \lambda[(0)^2 - 2(0)]$
$\Rightarrow \lambda[(0)^2 - 2(0)] = 4(0) + 1 = \lambda(0)$
$\Rightarrow 0.\lambda = 1 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{0}$
अतः, λ का कोई वास्तविक मान ऐसा नहीं है जिस पर फलन संतत हो।
यदि, $x = 1$,
$f(1) = 4(1) + 1 = 5$ तथा $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 4(1) + 1 = 5$, यहाँ, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$
अतः, फलन f, λ के सभी मानों के लिए संतत है।

प्रश्न 19:
दर्शाइए कि $g(x) = x - [x]$ द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिंदुओं पर असंतत है। यहाँ $[x]$ एक महत्तम पूर्णांक निरूपित करता है, जो x के बराबर या x से कम है।

उत्तर 19:
माना, k कोई पूर्णांक संख्या है।
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^-} x - [x] = k - (\mathrm{k} - 1) = 1$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to k^+} f(x) = \lim_{x\to k^+} x - [x] = k - (\mathrm{k}) = 0,$
यहाँ, $x = k$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा $\neq$ दाएँ पक्ष की सीमा,
अतः, समस्त पूर्णांक बिंदुओं पर, फलन f संतत नहीं है।

प्रश्न 20:
क्या $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर संतत है?

उत्तर 20:
दिया गया फलन $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ तथा
$x = \pi$ पर, $f(\pi) = \pi^2 - \sin\pi + 5 = \pi^2 - 0 + 5 = \pi^2 + 5$
$\lim_{x\to n} f(x) = \lim_{x\to n} x^2 - \sin x + 5 = \pi^2 - \sin\pi + 5 = \pi^2 - 0 + 5 = \pi^2 + 5$
यहाँ, $x = \pi$ पर, $\lim_{x\to n} f(x) = f(\pi) = \pi^2 + 5$
अतः, $x = \pi$ पर, फलन f संतत है।

प्रश्न 21:
निम्नलिखित फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए:
(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ **(b)** $f(x) = \sin x - \cos x$
(c) $f(x) = \sin x \,.\cos x$

उत्तर 21:
माना, फलन $g(x) = \sin x$
माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $g(k) = \sin k$
बाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^-} g(x) = \lim_{x\to k^-} \sin x = \lim_{h\to 0} \sin(k - h) = \lim_{h\to 0} \sin k\cos h - \cos k\sin h = \sin k$
दाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^+} g(x) = \lim_{x\to k^+} \sin x = \lim_{h\to 0} \sin(k + h) = \lim_{h\to 0} \sin k\cos h + \cos k\sin h = \sin k$
यहाँ, $x = k$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(k)$
अतः, फलन g, समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

माना, फलन $h(x) = \cos x$
माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \cos k$
बाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^-} h(x) = \lim_{x\to k^-} \cos x = \lim_{h\to 0} \cos(k - h) = \lim_{h\to 0} \cos k\cos h + \sin k\sin h = \cos k$
दाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^+} h(x) = \lim_{x\to k^+} \cos x = \lim_{h\to 0} \cos(k + h) = \lim_{h\to 0} \cos k\cos h - \sin k\sin h = \cos k$
यहाँ, $x = k$ पर, फलन h के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $h(k)$
अतः, फलन h, समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

हम जानते हैं कि यदि g और h दो संतत फलन हैं, तो $g + h, g - h$ और gh भी संतत फलन होंगे।
अतः, **(a)** $f(x) = \sin x + \cos x$ **(b)** $f(x) = \sin x - \cos x$ और **(c)** $f(x) = \sin x . \cos x$ संतत फलन है।

प्रश्न 22:

cosine, cosecant, secant और cotangent फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए।

उत्तर 22:

माना, फलन $g(x) = \sin x$
माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $g(k) = \sin k$
बाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^-} g(x) = \lim_{x\to k^-} \sin x = \lim_{h\to 0} \sin(k-h) = \lim_{h\to 0} \sin k \cos h - \cos k \sin h = \sin k$
दाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^+} g(x) = \lim_{x\to k^+} \sin x = \lim_{h\to 0} \sin(k+h) = \lim_{h\to 0} \sin k \cos h + \cos k \sin h = \sin k$
यहाँ, $x = k$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(k)$
अतः, फलन g, समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

माना, फलन $h(x) = \cos x$
माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \cos k$
बाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^-} h(x) = \lim_{x\to k^-} \cos x = \lim_{h\to 0} \cos(k-h) = \lim_{h\to 0} \cos k \cos h + \sin k \sin h = \cos k$
दाएँ पक्ष की सीमा
$\lim_{x\to k^+} h(x) = \lim_{x\to k^+} \cos x = \lim_{h\to 0} \cos(k+h) = \lim_{h\to 0} \cos k \cos h - \sin k \sin h = \cos k$
यहाँ, $x = k$ पर, फलन h के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $h(k)$
अतः, फलन h, समस्त वास्तविक बिंदुओं के लिए संतत है।

हम जानते हैं कि यदि g और h दो संतत फलन हैं, तो
$\frac{g}{h},\ h \neq 0$ संतत है, $\frac{1}{h},\ h \neq 0$ संतत है और $\frac{1}{g},\ g \neq 0$ भी संतत है।
इसलिए, $cosec\, x = \frac{1}{\sin x}, \sin x \neq 0$, संतत है। $\Rightarrow x \neq n\pi\ (n \in Z)$, संतत है।
अतः, $cosec\, x,\ x = n\pi\ (n \in Z)$, के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है।

$sec\, x = \frac{1}{\cos x}, \cos x \neq 0$, संतत है। $\Rightarrow x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}\ (n \in Z)$, संतत है।
अतः, $sec\, x,\ x = \frac{(2n+1)\pi}{2}\ (n \in Z)$, के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है।

$cot\, x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sin x \neq 0$, संतत है। $\Rightarrow x \neq n\pi\ (n \in Z)$, संतत है।
अतः, $cot\, x,\ x = n\pi\ (n \in Z)$, के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है।

प्रश्न 23:

f के सभी असंतत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{यदि } x < 0 \\ x + 1, \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर 23:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$f(k) = \frac{\sin k}{k}$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin k}{k}$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0 + 1 = 1$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 0 + 1 = 1$,

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0)$

अतः, $x = 0$ पर, फलन f संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0$,

$f(k) = k + 1$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} (\mathrm{x} + 1) = \mathrm{k} + 1$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, $x > 0$, के लिए संतत है।

इसप्रकार, फलन f, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 24:

निर्धारित कीजिए कि फलन f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक संतत फलन है।

उत्तर 24:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k \neq 0$ या $k = 0$

पहली स्थिति: यदि, $k \neq 0$,

$f(k) = k^2 \sin \frac{1}{k}$ तथा $\lim_{x \to k} f(x) = \lim_{x \to k} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = k^2 \sin \frac{1}{k}$, यहाँ, $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

अतः, फलन f, $k \neq 0$ के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(0) = 0$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)$

हम जानते हैं कि, $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1, \ x \neq 0 \qquad \Rightarrow -x^2 \leq \sin \frac{1}{x} \leq x^2$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (-x^2) \leq \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0} x^2$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \leq 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

इसीप्रकार, दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = 0$,

यहाँ, $x = 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(0)$

अतः, $x = 0$ पर, f संतत है। इसप्रकार, फलन f, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 25:

f के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ f निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, \text{ यदि } x \neq 0 \\ -1, \text{ यदि } x = 0 \end{cases}$$

उत्तर 25:

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k \neq 0$ या $k = 0$

पहली स्थिति: यदि, $k \neq 0$ पर, $f(0) = 0 - 1 = -1$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{k\to 0^-} f(x) = \lim_{k\to 0^-} (\sin x - \cos x) = 0 - 1 = -1$

दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{k\to 0^+} f(x) = \lim_{k\to 0^+} (\sin x - \cos x) = 0 - 1 = -1,$

यहाँ, $x \neq 0$ पर, फलन f के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(x)$

अतः, फलन f, $x \neq 0$ पर संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $f(k) = -1$

तथा $\lim_{x\to k} f(x) = \lim_{x\to k} (-1) = -1$, यहाँ, $\lim_{x\to k} f(x) = f(k)$

अतः, $x = 0$ पर, f संतत है। इसप्रकार, फलन f, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

प्रश्न 26 से 29 में k के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि प्रदत्त फलन निर्दिष्ट बिंदु पर संतत हो :

प्रश्न 26:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, \text{ यदि } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, \text{ यदि } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \frac{\pi}{2}$ पर

उत्तर 26:

दिया है: फलन $x = \frac{\pi}{2}$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{k \cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{k \cos x}{\pi - 2x} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{k \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{k \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{k \sin h}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-k \sin h}{-2h} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k}{2} = 3 \qquad \left[\because \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\right]$$

$$\Rightarrow k = 6$$

प्रश्न 27:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, \text{ यदि } x \leq 2 \\ 3, \text{ यदि } x > 2 \end{cases}$$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर

उत्तर 27:
दिया है: फलन $x = 2$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(2)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} kx^2 = \lim_{x\to 2^+} 3 = k(2)^2$
$\Rightarrow 4k = 3 = 4k$
$\Rightarrow k = \frac{3}{4}$

प्रश्न 28:
$f(x) = \begin{cases} kx+1, \text{यदि } x \le \pi \\ \cos x, \text{यदि } x > \pi \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर

उत्तर 28:
दिया है: फलन $x = \pi$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(\pi)$
$\Rightarrow \lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} f(x) = f(\pi)$
$\Rightarrow \lim_{x\to \pi^-} kx + 1 = \lim_{x\to \pi^+} \cos x = k(\pi) + 1$
$\Rightarrow k(\pi) + 1 = \cos \pi = k\pi + 1$
$\Rightarrow k\pi + 1 = -1 = k\pi + 1$
$\Rightarrow \pi k = -2 \qquad \Rightarrow k = -\frac{2}{\pi}$

प्रश्न 29:
$f(x) = \begin{cases} kx+1, \text{यदि } x \le 5 \\ 3x-5, \text{यदि } x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 5$ पर

उत्तर 29:
दिया है: फलन $x = 5$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(5)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 5^-} kx + 1 = \lim_{x\to 5^+} 3x - 5 = 5k + 1$
$\Rightarrow 5k + 1 = 15 - 5 = 5k + 1$
$\Rightarrow 5k = 9 \qquad \Rightarrow k = \frac{9}{5}$

प्रश्न 30:
a तथा b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5, \text{यदि } x \le 2 \\ ax+b, \text{यदि } 2 < x < 10 \\ 21, \text{यदि } x \ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन हो।

उत्तर 30:
दिया है: फलन $x = 2$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(2)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$
$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} 5 = \lim_{x\to 2^+} ax + b = 5$

$\Rightarrow 2a + b = 5$ ... (1)

फलन $x = 10$ पर संतत है। इसलिए, बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $f(10)$

$\Rightarrow \lim_{x\to10^-} f(x) = \lim_{x\to10^+} f(x) = f(10)$

$\Rightarrow \lim_{x\to10^-} ax + b = \lim_{x\to10^+} 21 = 21$

$\Rightarrow 10a + b = 21$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर

$a = 2 \quad b = 1$

प्रश्न 31:

दर्शाइए कि $f(x) = \cos(x^2)$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर 31:

दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों g और h के संयोजन में लिख सकते हैं ($f = goh$)। जहाँ, $g(x) = \cos x$ और $h(x) = x^2$ है। यदि g और h दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।

$[\because goh(x) = g(h(x)) = g(x^2) = \cos(x^2)]$

फलन $g(x) = \cos x$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $g(k) = \cos k$

$\lim_{x\to k} g(x) = \lim_{x\to k} \cos x = \lim_{h\to 0} \cos(k+h) = \lim_{h\to 0} \cos k \cos h - \sin k \sin h = \cos k$

यहाँ, $\lim_{x\to k} g(x) = g(k)$, अतः, फलन g, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

फलन $h(x) = x^2$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = k^2$

$\lim_{x\to k} h(x) = \lim_{x\to k} x^2 = k^2$

यहाँ, $\lim_{x\to k} h(x) = h(k)$, अतः, फलन h, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

प्रश्न 32:

दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर 32:

दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों g और h के संयोजन में लिख सकते हैं ($f = goh$)। जहाँ, $g(x) = |x|$ और $h(x) = \cos x$ है। यदि g और h दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।

$[\because goh(x) = g(h(x)) = g(\cos x) = |\cos x|]$

फलन $g(x) = |x|$

इस फलन g को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ \text{x}, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$

पहली स्थिति: यदि, $k < 0$,

$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x\to k} g(x) = \lim_{x\to k}(-\text{x}) = 0$, यहाँ, $\lim_{x\to k} g(x) = g(k)$

अतः, फलन g, 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $g(0) = 0 + 1 = 1$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (x) = 0,$
यहाँ, $x = 0$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(0)$
अतः, $x = 0$ पर, फलन g संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0,$
$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x\to k} g(x) = \lim_{x\to k}(x) = 0$, यहाँ, $\lim_{x\to k} g(x) = g(k)$
अतः, फलन $g, x > 0$, के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन g, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

फलन $h(x) = \cos x$
माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \cos k$
$\lim_{x\to k} h(x) = \lim_{x\to k} \cos x = \cos k$
यहाँ, $\lim_{x\to k} h(x) = h(k)$, अतः, फलन h, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।
इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

प्रश्न 33:
जाँचिए कि क्या $\sin|x|$ एक संतत फलन है।

उत्तर 33:
दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों h और g के संयोजन में लिख सकते हैं ($f = hog$)। जहाँ, $h(x) = \sin x$ और $g(x) = |x|$ है। यदि h और g दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।
[$\because hog(x) = h(g(x)) = h(|x|) = \sin|x|$]
फलन $h(x) = \sin x$
माना, k कोई वास्तविक संख्या है। $x = k$ पर, $h(k) = \sin k$
$\lim_{x\to k} h(x) = \lim_{x\to k} \sin x = \sin k$
यहाँ, $\lim_{x\to k} h(x) = h(k)$, अतः, फलन h, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।
फलन $g(x) = |x|$
इस फलन g को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ \text{x}, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$
पहली स्थिति: यदि, $k < 0,$
$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x\to k} g(x) = \lim_{x\to k}(-\text{x}) = 0$, यहाँ, $\lim_{x\to k} g(x) = g(k)$
अतः, फलन g, 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $g(0) = 0 + 1 = 1$

बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0,$
यहाँ, $x = 0$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(0)$
अतः, $x = 0$ पर, फलन g संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0,$
$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x \to k} g(x) = \lim_{x \to k} (x) = 0,$ यहाँ, $\lim_{x \to k} g(x) = g(k)$
अतः, फलन $g, x > 0,$ के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन $g,$ सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

प्रश्न 34:

$f(x) = |x| - |x + 1|$ द्वारा परिभाषित फलन f के सभी असांत्यता के बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

उत्तर 34:

दिए गए फलन को प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए परिभाषित मानते हुए, फलन f को दो फलनों h और g के संयोजन में लिख सकते हैं $(f = g - h)$। जहाँ, $g(x) = |x|$ और $h(x) = |x + 1|$ है।
यदि h और g दोनों ही संतत फलन हैं, तो f भी एक संतत फलन होगा।
फलन $g(x) = |x|$
इस फलन g को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{यदि } x < 0 \\ \text{x}, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < 0$ या $k = 0$ या $k > 0$
पहली स्थिति: यदि, $k < 0,$
$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x \to k} g(x) = \lim_{x \to k} (-\text{x}) = 0,$ यहाँ, $\lim_{x \to k} g(x) = g(k)$
अतः, फलन $g,$ 0 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = 0$ पर, $g(0) = 0 + 1 = 1$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0,$
यहाँ, $x = 0$ पर, फलन g के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $g(0)$
अतः, $x = 0$ पर, फलन g संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > 0,$
$g(k) = 0$ तथा $\lim_{x \to k} g(x) = \lim_{x \to k} (x) = 0,$ यहाँ, $\lim_{x \to k} g(x) = g(k)$
अतः, फलन $g, x > 0,$ के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन $g,$ सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।
फलन $h(x) = |x + 1|$
इस फलन h को पुनः व्यवस्थित करने पर,

$$h(x) = \begin{cases} -(x + 1), & \text{यदि } x < -1 \\ x + 1, & \text{यदि } x \geq -1 \end{cases}$$

माना, k कोई वास्तविक संख्या है। प्रश्नानुसार $k < -1$ या $k = -1$ या $k > -1$
पहली स्थिति: यदि, $k < -1$,
$h(k) = -(k+1)$ तथा $\lim_{x \to k} h(x) = \lim_{x \to k} -(k+1) = -(k+1)$, यहाँ, $\lim_{x \to k} h(x) = h(k)$
अतः, फलन h, -1 से छोटी सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

दूसरी स्थिति: यदि, $k = -1$ पर, $h(-1) = -1 + 1 = 0$
बाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} -(-1+1) = 0$
दाएँ पक्ष की सीमा = $\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} (x+1) = -1 + 1 = 0$,
यहाँ, $x = -1$ पर, फलन h के बाएँ पक्ष की सीमा = दाएँ पक्ष की सीमा = $h(-1)$
अतः, $x = -1$ पर, फलन h संतत है।

तीसरी स्थिति: यदि, $k > -1$,
$h(k) = k + 1$ तथा $\lim_{x \to k} h(x) = \lim_{x \to k} (k+1) = \mathrm{k} + 1$, यहाँ, $\lim_{x \to k} h(x) = h(k)$
अतः, फलन $h, x > -1$, के लिए संतत है।
इसप्रकार, फलन h, सभी वास्तविक संख्याओं के लिए संतत है।

इसप्रकार, g और h दोनों ही संतत फलन हैं, अतः f भी एक संतत फलन होगा।

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1 से 8 में x के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1:

$$\sin(x^2+5)$$

उत्तर 1:

माना $y = \sin(x^2+5)$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+5).\frac{d}{dx}(x^2+5)$$

$$= cos(x^2+5).2x$$

प्रश्न 2:

$\cos(\sin x)$

उत्तर 2:

माना $y = \cos(\sin x)$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sin x).\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= -sin(\sin x).\cos x$$

प्रश्न 3:

$\sin(ax+b)$

उत्तर 3:

माना $y = \sin(ax+b)$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(ax+b).\frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$= cos(ax+b).a$$

प्रश्न 4:

$\sec(\tan(\sqrt{x}))$

उत्तर 4:

माना $y = \sec(\tan(\sqrt{x}))$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x}).\frac{d}{dx}(\tan\sqrt{x})$$

$$= \sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \sec(\tan\sqrt{x})\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

प्रश्न 5:

$\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

उत्तर 5:

माना

$$y = \frac{sin(ax+b)}{cos(cx+d)}$$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos(cx+d)\,.\frac{d}{dx}sin(ax+b) - sin(ax+b).\frac{d}{dx}cos(cx+d)}{[cos(cx+d)]^2}$$

$$= \frac{cos(cx+d)\,.\sin(ax+b).\frac{d}{dx}(ax+b) - sin(ax+b)\,.[-sin(cx+d).\frac{d}{dx}(cx+d)]}{cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{cos(cx+d)\,.\sin(ax+b).a + sin(ax+b)\,.sin(cx+d)\,c}{cos^2(cx+d)}$$

प्रश्न 6:

$\cos x^3\,.\sin^2(x^5)$

उत्तर 6:

माना $y = \cos x^3\,.\sin^2(x^5)$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^3\,.\frac{d}{dx}\sin^2(x^5) + \sin^2(x^5).\frac{d}{dx}\cos x^3$$

$$= \cos x^3\,.2\sin x^5\cos x^5\,.\frac{d}{dx}x^5 + \sin^2(x^5)\,[-\sin x^3].\frac{d}{dx}x^3$$

$$= \cos x^3\,.2\sin x^5\cos x^5\,.5x^4 - \sin^2(x^5)\sin x^3\,.3x^2$$

प्रश्न 7:

$2\sqrt{\cot(x^2)}$

उत्तर 7:

माना $y = 2\sqrt{\cot(x^2)}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{2\sqrt{\cot(x^2)}}.\frac{d}{dx}[\cot(x^2)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cot(x^2)}}.[-cossec\ x^2].\frac{d}{dx}x^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cot(x^2)}}.[-cossec\ x^2].2x$$

प्रश्न 8:

$\cos(\sqrt{x})$

उत्तर 8:

माना $y = \cos(\sqrt{x})$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sqrt{x}).\frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= -\sin(\sqrt{x}).\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

प्रश्न 9:

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x-1|, x \in \boldsymbol{R}, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

उत्तर 9:

$x = 1$ पर,

$$LHD = \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{|1-h-1|-|1-1|}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{-h} = -1$$

$$RHD = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|1+h-1|-|1-1|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$, इसलिए, फलन $f(x) = |x-1|, x \in \boldsymbol{R}, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

प्रश्न 10:

सिद्ध कीजिए कि महत्तम पूर्णांक फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1$ तथा $x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

उत्तर 10:

$x = 1$ पर,

$$LHD = \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{[1-h]-|1|}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-1}{-h} = \infty$$

$$RHD = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[1+h]-[1]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} = 0$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$, इसलिए, फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

$x = 2$ पर,

$$LHD = \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{[2-h]-[2]}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-2}{-h} = \infty$$

$$RHD = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[2+h]-[2]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2-2}{h} = 0$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$, इसलिए, फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित प्रश्नों में $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

प्रश्न 1:

$2x + 3y = \sin x$

उत्तर 1:

$$2x + 3y = \sin x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}\sin x$$

$$\Rightarrow 2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}$$

प्रश्न 2:

$2x + 3y = \sin y$

उत्तर 2:

$$2x + 3y = \sin y$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}\sin y$$

$$\Rightarrow 2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(\cos y - 3) = 2 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y - 3}$$

प्रश्न 3:

$ax + by^2 = \cos y$

उत्तर 3:

$$ax + by^2 = \cos y$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(ax) + \frac{d}{dx}(by^2) = \frac{d}{dx}\cos y$$

$$\Rightarrow a + 2by\frac{dy}{dx} = -\sin y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2by + \sin y) = -a \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2by + \sin y}$$

प्रश्न 4:

$xy + y^2 = \tan x + y$

उत्तर 4:

$$xy + y^2 = \tan x + y$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}\tan x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y - 1) = \sec^2 x - y \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$$

प्रश्न 5:
$x^2 + xy + y^2 = 100$

उत्तर 5:
$$x^2 + xy + y^2 = 100$$
दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर
$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(100)$$
$$\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x + 2y) = 2x + y \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x + 2y}$$

प्रश्न 6:
$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

उत्तर 6:
$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$$
दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर
$$\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}y^3 = \frac{d}{dx}81$$
$$\Rightarrow 3x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y.2x + x.2y\frac{dy}{dx} + y^2.1 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 + 2xy + 3y^2) = -(3x^2 + 2xy + y^2) \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}$$

प्रश्न 7:
$\sin^2 y + \cos xy = k$

उत्तर 7:
$$\sin^2 y + \cos xy = k$$
दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर
$$\frac{d}{dx}\sin^2 y + \frac{d}{dx}\cos xy = \frac{d}{dx}k$$
$$\Rightarrow 2\sin y\cos y\frac{dy}{dx} - \sin xy\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$$
$$\Rightarrow \sin 2y\frac{dy}{dx} - x\sin xy\frac{dy}{dx} - y\sin xy = 0$$
$$\Rightarrow (\sin 2y - x\sin xy)\frac{dy}{dx} = y\sin xy$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y\sin xy}{\sin 2y - x\sin xy}$$

प्रश्न 8:
$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

उत्तर 8:

$$\sin^2 x + \cos^2 y = 1$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{d}{dx}\sin^2 x + \frac{d}{dx}\cos^2 y = \frac{d}{dx}1$

$\Rightarrow 2\sin x\cos x + 2\cos y\,(-\sin y)\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \sin 2x - \sin 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$

प्रश्न 9:
$y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

उत्तर 9:

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

माना, $x = \tan\theta$

इसलिए, $y = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow y = 2\tan^{-1}x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 10:
$y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

उत्तर 10:

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$$

माना, $x = \tan\theta$

इसलिए, $y = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1}x$

$\Rightarrow y = 3\tan^{-1}x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{1+x^2}$$

प्रश्न 11:
$y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

उत्तर 11:

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

माना, $x = \tan\theta$

इसलिए, $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow y = 2\tan^{-1}x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 12:

$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

उत्तर 12:

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

माना, $x = \tan\theta$

इसलिए,

$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \sin^{-1}(\cos 2\theta) = \sin^{-1}\left\{\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)\right\} = \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 13:

$y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

उत्तर 13:

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

माना, $x = \tan\theta$

इसलिए, $y = \cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \cos^{-1}(\sin 2\theta) = \cos^{-1}\left\{\cos(\frac{\pi}{2} - 2\theta)\right\} = \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$

$\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{2}{1+x^2}$$

प्रश्न 14:

$y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

उत्तर 14:

$$y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

माना, $x = \sin\theta$

इसलिए, $y = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1 - sin^2\theta}\right)$
$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\sin^{-1}x$
$\Rightarrow y = 2\sin^{-1}x$
दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

प्रश्न 15:

$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

उत्तर 15:

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$$

माना, $x = \cos\theta$
इसलिए, $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2cos^2\theta-1}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right) = \sec^{-1}(\sec 2\theta) = 2\theta = 2\cos^{-1}x$
$\Rightarrow y = 2\cos^{-1}x$
दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)
(कक्षा 12)
प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1:
$\frac{e^x}{\sin x}$

उत्तर 1:
माना $y = \frac{e^x}{\sin x}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x.\frac{d}{dx}\sin x - \sin x\frac{d}{dx}e^x}{\sin^2 x} = \frac{e^x.\cos x - \sin x.e^x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{\sin^2 x}$$

प्रश्न 2:
$e^{\sin^{-1}x}$

उत्तर 2:
माना $y = e^{\sin^{-1}x}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin^{-1}x}.\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = e^{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

प्रश्न 3:
e^{x^3}

उत्तर 3:
माना $y = e^{x^3}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^3}.\frac{d}{dx}x^3 = e^{x^3}.3x^2 = 3x^2e^{x^3}$$

प्रश्न 4:
$\sin(\tan^{-1}e^{-x})$

उत्तर 4:
माना $y = \sin(\tan^{-1}e^{-x})$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\tan^{-1}e^{-x}).\frac{d}{dx}\tan^{-1}e^{-x} = \cos(\tan^{-1}e^{-x}).\frac{1}{1+(e^{-x})^2}.\frac{d}{dx}e^{-x}$$

$$= \cos(\tan^{-1}e^{-x}).\frac{1}{1+e^{-2x}}.(-e^{-x}) = -\frac{e^{-x}\cos(\tan^{-1}e^{-x})}{1+e^{-2x}}$$

प्रश्न 5:
$\log(\cos e^x)$

उत्तर 5:
माना $y = \log(\cos e^x)$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos e^x}.\frac{d}{dx}\cos e^x = \frac{1}{\cos e^x}(-\sin e^x)\frac{d}{dx}e^x = -\tan e^x.e^x$$

प्रश्न 6:
$e^x + e^{x^2} + \cdots + e^{x^5}$

उत्तर 6:
माना $y = e^x + e^{x^2} + e^{x^3} + e^{x^4} + e^{x^5}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = e^x + e^{x^2}\frac{d}{dx}x^2 + e^{x^3}\frac{d}{dx}x^3 + e^{x^4}\frac{d}{dx}x^4 + e^{x^5}\frac{d}{dx}x^5$$
$$= e^x + e^{x^2}.2x + e^{x^3}.3x^2 + e^{x^4}.4x^3 + e^{x^5}.5x^4$$
$$= e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2e^{x^3} + 4x^3e^{x^4} + 5x^4e^{x^5}$$

प्रश्न 7:
$\sqrt{e^{\sqrt{x}}}, x > 0$

उत्तर 7:
माना $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}\frac{d}{dx}e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}.e^{\sqrt{x}}.\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}.e^{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$$

प्रश्न 8:
$\log(\log x), x > 1$

उत्तर 8:
माना $y = \frac{e^x}{\sin x}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log x}.\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}$$

प्रश्न 9:
$\frac{\cos x}{\log x}, x > 0$

उत्तर 9:
माना $y = \frac{\cos x}{\log x}$

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x\frac{d}{dx}\cos x - \cos x\frac{d}{dx}\log x}{(\log x)^2} = \frac{\log x.(-\sin x) - \cos x.\frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{-(x\sin x\log x + \cos x)}{x(\log x)^2}$

प्रश्न 10:
$\cos(\log x + e^x)$

उत्तर 10:
माना $y = \cos(\log x + e^x)$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\log x + e^x).\frac{d}{dx}(\log x + e^x) = -\sin(\log x + e^x).\left(\frac{1}{x} + e^x\right)$$

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)
(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.5

1 से 11 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1:

$\cos x\ .\cos 2x\ .\cos 3x$

उत्तर 1:

माना $y = \cos x\ .\cos 2x\ .\cos 3x$, दोनों ओर log लेने पर

$$\log y = \log\cos x + \log\cos 2x + \log\cos 3x$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}.\frac{d}{dx}\cos x + \frac{1}{\cos 2x}.\frac{d}{dx}\cos 2x + \frac{1}{\cos 3x}.\frac{d}{dx}\cos 3x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{\cos x}.(-\sin x) + \frac{1}{\cos 2x}.(-\sin 2x).2 + \frac{1}{\cos 3x}.(-\sin 3x).3\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x\ .\cos 2x\ .\cos 3x\,[-\tan x - 2\tan 2x - 3\tan 3x]$$

प्रश्न 2:

$\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

उत्तर 2:

माना $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$, दोनों ओर log लेने पर

$$\log y = \frac{1}{2}[\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x-3) - \log(x-4) - \log(x-5)]$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x-5)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{(x-5)}\right]$$

प्रश्न 3:

$(\log x)^{\cos x}$

उत्तर 3:

माना $y = (\log x)^{\cos x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log y = \log(\log x)^{\cos x} = \cos x\,.\log\log x$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x\,.\frac{d}{dx}\log\log x + \log\log x\,.\frac{d}{dx}\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\cos x\,.\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} + \log\log x\,.(-\sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\cos x}\left[\frac{\cos x - \sin x\log\log x}{x\log x}\right]$$

प्रश्न 4:

$x^x - 2^{\sin x}$

उत्तर 4:

माना $u = x^x$ तथा $v = 2^{\sin x}$ इसलिए, $y = u - v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ ... (1)

यहाँ, $u = x^x$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = x\log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log x + \log x.\frac{d}{dx}x = x.\frac{1}{x} + \log x.1 = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u[1 + \log x] = x^x[1 + \log x] \quad ...(2)$$

तथा , $v = 2^{\sin x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = \sin x \log 2$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log 2.\frac{d}{dx}\sin x = \log 2.\cos x$$

$$\frac{dv}{dx} = v[\cos x \log 2] = 2^{\sin x}[\cos x \log 2] \quad ...(3)$$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^x[1 + \log x] - 2^{\sin x}[\cos x \log 2]$$

प्रश्न 5:

$(x + 3)^2.(x + 4)^3.(x + 5)^4$

उत्तर 5:

माना $y = (x + 3)^2.(x + 4)^3.(x + 5)^4$, दोनों ओर log लेने पर

$$\log y = 2\log(x + 3) + 3\log(x + 4) + 4\log(x + 5)$$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{(x + 3)} + 3.\frac{1}{(x + 4)} + 4.\frac{1}{(x + 5)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2(x + 4)(x + 5) + 3(x + 3)(x + 5) + 4(x + 3)(x + 4)}{(x + 3)(x + 4)(x + 5)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2(x^2 + 9x + 20) + 3(x^2 + 8x + 15) + 4(x^2 + 7x + 12)}{(x + 3)(x + 4)(x + 5)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x + 3)^2.(x + 4)^3.(x + 5)^4\left[\frac{9x^2 + 70x + 133}{(x + 3)(x + 4)(x + 5)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x + 3).(x + 4)^2.(x + 5)^3(9x^2 + 70x + 133)$$

प्रश्न 6:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

उत्तर 6:

माना $u = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x$ तथा $v = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ... (1)

यहाँ, $u = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = x\log\left(x+\frac{1}{x}\right)$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log\left(x+\frac{1}{x}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right).\frac{d}{dx}x$$

$$= x.\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)}.\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \log\left(x+\frac{1}{x}\right).1 = \frac{x^2}{x^2+1}.\frac{x^2-1}{x^2} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] \quad ... (2)$$

तथा , $v = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = \left(1+\frac{1}{x}\right)\log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(1+\frac{1}{x}\right).\frac{d}{dx}\log x + \log x.\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x} + \log x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right).\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x^2}\right] = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x^2+1-\log x}{x^2}\right] \quad ... (3)$$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x^2+1-\log x}{x^2}\right]$$

प्रश्न 7:

$(\log x)^x + x^{\log x}$

उत्तर 7:

माना $u = (\log x)^x$ तथा $v = x^{\log x}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ... (1)

यहाँ, $u = (\log x)^x$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = x \log\log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log\log x + \log\log x.\frac{d}{dx}x$$

$= x.\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} + \log\log x \,.\, 1 = \frac{1}{\log x} + \log\log x$

$\frac{du}{dx} = (\log x)^x \left[\frac{1 + \log x \,.\, \log\log x}{\log x}\right]$

$= (\log x)^{x-1}(1 + \log x \,.\, \log\log x) \quad ...(2)$

तथा , $v = x^{\log x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = \log x \log x$, इसलिए,

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log x \,.\, \frac{d}{dx}\log x + \log x \,.\, \frac{d}{dx}\log x$

$= \log x \,.\, \frac{1}{x} + \log x \,.\, \frac{1}{x}$

$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{2\log x}{x}\right] = x^{\log x}\left[\frac{2\log x}{x}\right] = x^{\log x - 1}(2\log x) \quad ...(3)$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$\frac{dy}{dx} = (\log x)^{x-1}(1 + \log x \,.\, \log\log x) + x^{\log x - 1}(2\log x)$

प्रश्न 8:

$(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

उत्तर 8:

माना $u = (\sin x)^x$ तथा $v = \sin^{-1}\sqrt{x}$ इसलिए, $y = u + v$
दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad ...(1)$

यहाँ, $u = (\sin x)^x$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = x \log\sin x$, इसलिए,

$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log\sin x + \log\sin x \,.\, \frac{d}{dx}x$

$= x.\frac{1}{\sin x}.\cos x + \log\sin\ x \,.\, 1 = x\cot x + \log\sin x$

$\frac{du}{dx} = (\sin x)^x(x\cot x + \log\sin x) \quad ...(2)$

तथा , $v = \sin^{-1}\sqrt{x}$, इसलिए,

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log x \,.\, \frac{d}{dx}\log x + \log x \,.\, \frac{d}{dx}\log x = \log x \,.\, \frac{1}{x} + \log x \,.\, \frac{1}{x}$

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} \quad ...(3)$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^x(x\cot x + \log\sin x) + \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

प्रश्न 9:

$x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

उत्तर 9:

माना $u = x^{\sin x}$ तथा $v = (\sin x)^{\cos x}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ... (1)

यहाँ, $u = x^{\sin x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = \sin x \log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \sin x \cdot \frac{d}{dx}\log x + \log x \cdot \frac{d}{dx}\sin x = \sin x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{x} + \log x \cos x$$

$$\frac{du}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cos x\right] = x^{\sin x - 1}(\sin x + x \log x \cos x) \quad ...(2)$$

तथा , $v = (\sin x)^{\cos x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = \cos x \log \sin x$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \cos x \cdot \frac{d}{dx}\log \sin x + \log \sin x \cdot \frac{d}{dx}\cos x = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x}\cos x + \log \sin x\,(-\sin x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x] = (\sin x)^{\cos x}(\cos x \cot x - \sin x \log \sin x) \quad ...(3)$$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x - 1}(\sin x + x \log x \cos x) + (\sin x)^{\cos x}(\cos x \cot x - \sin x \log \sin x)$$

प्रश्न 10:

$x^{x \cos x} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$

उत्तर 10:

माना $u = x^{x \cos x}$ तथा $v = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ ... (1)

यहाँ, $u = x^{x \cos x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = x\log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cos x \cdot \frac{d}{dx}\log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} x \cos x = x \cos x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot (-x \cdot \sin x + \cos x)$$

$$= \cos x - x \sin x \log x + \cos x \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u[\cos x - x \sin x \log x + \cos x \log x]$$

$$= x^{x \cos x}[\cos x - x \sin x \log x + \cos x \log x] \quad ...(2)$$

तथा , $v = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, दोनों ओर log लेने पर
$\log v = \log(x^2+1) - \log(x^2-1)$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2+1}.2x - \frac{1}{x^2-1}.2x = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}\right] = \frac{x^2+1}{x^2-1}\left[\frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}\right] = -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \quad \dots(3)$$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^{x\cos x}[\cos x - x\sin x\log x + \cos x\log x] - \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

प्रश्न 11:

$(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

उत्तर 11:

माना $u = (x\cos x)^x$ तथा $v = (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$ इसलिए, $y = u + v$
दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \dots(1)$$

यहाँ, $u = (x\cos x)^x$, दोनों ओर log लेने पर
$\log u = x\log(x\cos x)$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log(x\cos x) + \log(x\cos x).\frac{d}{dx}x$$

$$= x.\frac{1}{(x\cos x)}(-x\sin x + \cos x) + \log(x\cos x).1 = -x\tan x + 1 + \log(x\cos x)$$

$$\frac{du}{dx} = (x\cos x)^x[1 - x\tan x + \log(x\cos x)]$$

$$= (x\cos x)^x[1 - x\tan x + \log(x\cos x)] \quad \dots(2)$$

तथा , $v = (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$, दोनों ओर log लेने पर
$\log v = \frac{1}{x}\log(x\sin x)$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{d}{dx}\log(x\sin x) + \log(x\sin x).\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}.\frac{1}{x\sin x}(x\cos x + \sin x) + \log(x\sin x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x\cot x + 1 - \log(x\sin x)}{x^2}\right] = (x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x\cot x + 1 - \log(x\sin x)}{x^2}\right] \quad \dots(3)$$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = (x\cos x)^x[1 - x\tan x + \log(x\cos x)] + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x\cot x + 1 - \log(x\sin x)}{x^2}\right]$$

12 से 15 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 12:

$x^y + y^x = 1$

उत्तर 12:

माना $u = x^y$ तथा $v = y^x$ इसलिए, $u + v = 1$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$ ... (1)

यहाँ, $u = x^y$, दोनों ओर log लेने पर, $\log u = y\log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = y.\frac{d}{dx}\log x + \log x.\frac{d}{dx}y = y.\frac{1}{x} + \log x.\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = x^y\left[\frac{y}{x} + \log x.\frac{dy}{dx}\right] \quad ...(2)$$

तथा , $v = y^x$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = x\log y$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log y + \log y.\frac{d}{dx}x = x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y.1$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \quad ...(3)$$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1)में रखने पर

$$x^y\left[\frac{y}{x} + \log x.\frac{dy}{dx}\right] + y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] = 0$$

$$\Rightarrow yx^{y-1} + x^y\log x\frac{dy}{dx} + xy^{x-1}\frac{dy}{dx} + y^x\log y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^y\log x + xy^{x-1}) = -(y^x\log y + yx^{y-1})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^x\log y + yx^{y-1}}{x^y\log x + xy^{x-1}}$$

प्रश्न 13:

$y^x = x^y$

उत्तर 13:

$$y^x = x^y$$

दोनों ओर log लेने पर, $x\log y = y\log x$, इसलिए,

$$x.\frac{d}{dx}\log y + \log y.\frac{d}{dx}x = y.\frac{d}{dx}\log x + \log x.\frac{d}{dx}y$$

$$\Rightarrow x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y.1 = y.\frac{1}{x} + \log x.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y} - \log x\right) = \frac{y}{x} - \log y \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{x - y\log x}{y}\right) = \frac{y - x\log y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(y - x\log y)}{x(x - y\log x)}$$

प्रश्न 14:

$(\cos x)^y = (\cos y)^x$

उत्तर 14:

$$(\cos x)^y = (\cos y)^x$$

दोनों ओर log लेने पर, $y \cos x = x \cos y$, इसलिए,

$y.\frac{d}{dx}\cos x + \cos x.\frac{d}{dx}y = x.\frac{d}{dx}\cos y + \cos y.\frac{d}{dx}x$

$\Rightarrow y(-\sin x) + \cos x.\frac{dy}{dx} = x.(-\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y.1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(\cos x + x\sin y) = \cos y + y\sin x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y + y\sin x}{\cos x + x\sin y}$

प्रश्न 15:

$xy = e^{(x-y)}$

उत्तर 15:

$$xy = e^{(x-y)}$$

दोनों ओर log लेने पर, $\log x + \log y = (x-y)\log e \quad \Rightarrow \log x + \log y = (x-y)$, इसलिए,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} + 1\right) = 1 - \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1+y}{y}\right) = \frac{x-1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(y+1)}$

प्रश्न 16:

$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 16:

$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

दोनों ओर log लेने पर,

$\log f(x) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8)$, इसलिए,

$\frac{1}{f(x)}.\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2}.\frac{d}{dx}x^2 + \frac{1}{1+x^4}.\frac{d}{dx}x^4 + \frac{1}{1+x^8}.\frac{d}{dx}x^8$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}.f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2}.2x + \frac{1}{1+x^4}.4x^3 + \frac{1}{1+x^8}.8x^7$

$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$

$\Rightarrow f'(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$

प्रश्न 17:

$(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)$ का अवकलन निम्नलिखित तीन प्रकार से कीजिए:

(i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके

(ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके

(iii) लघुगणकीय अवकलन द्वारा

यह भी सत्यापित कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

उत्तर 17:

माना $y=(x^2-5x+8)(x^3+7x+9$

(i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके अवकलन

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-5x+8)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^3+7x+9)+(x^3+7x+9)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^2-5x+8)$$

$$=(x^2-5x+8)(3x^2+7)+(x^3+7x+9)(2x-5)$$

$$=(3x^4+7x^2-15x^3-35x+24x^2+56)+2x^4-5x^3+14x^2-35x+18x-45$$

$$=5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$$

(ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके अवकलन

$$y=(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)$$

$$=x^5+7x^3+9x^2-5x^4-35x^2-45x+8x^3+56x+72$$

$$=x^5-5x^4+15x^3-26x^2+11x+72$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}x^5-5\frac{d}{dx}x^4+15\frac{d}{dx}x^3-26\frac{d}{dx}x^2+11\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}72$$

$$=5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$$

(iii) लघुगणकीय अवकलन

$$y=(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)$$

दोनों ओर log लेने पर, $\log y=\log(x^2-5x+8)+\log(x^3+7x+9)$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x^2-5x+8)}.\frac{d}{dx}(x^2-5x+8)+\frac{1}{(x^3+7x+9)}.\frac{d}{dx}(x^3+7x+9)$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2-5x+8}.(2x-5)+\frac{1}{x^3+7x+9}.(3x^2+7)$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{(2x-5)(x^3+7x+9)+(3x^2+7)(x^2-5x+8)}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$=\mathrm{y}\left[\frac{2x^4+14x^2+18x-5x^3-35x-45+3x^4-15x^3+24x^2+7x^2-35x+56}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)\left[\frac{5x^5-20x^3+45x^2-52x+11}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}==5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$$

अतः, इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

प्रश्न 18:

यदि u,v तथा $w,\ x$ के फलन हैं, तो दो विधियों अर्थात प्रथम-गुणनफल नियम की पुनरावृत्ति द्वारा, द्वितीय - लघुगणकीय अवकलन द्वारा दर्शाइए कि

$$\frac{d}{dx}(u.v.w)=\frac{du}{dx}v.w+u.\frac{dv}{dx}.w+u.v\frac{dw}{dx}$$

उत्तर 18:

माना $y = u.v.w = u.(v.w)$

गुणनफल नियम की पुनरावृत्ति द्वारा अवकलन

$\frac{dy}{dx} = u.\frac{d}{dx}(v.w) + (v.w).\frac{d}{dx}u$

$= u\left[v\frac{d}{dx}w + w\frac{d}{dx}v\right] + v.w.\frac{du}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u.v.\frac{dw}{dx} + u.w.\frac{dv}{dx} + v.w.\frac{du}{dx}$

लघुगणकीय अवकलन

माना $y = u.v.w$

दोनों ओर log लेने पर, $\log y = \log u + \log v + \log w$

$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}.\frac{dw}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}.\frac{dw}{dx}\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u.v.w\left[\frac{1}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}.\frac{dw}{dx}\right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u.v.w}{u}.\frac{du}{dx} + \frac{u.v.w}{v}.\frac{dv}{dx} + \frac{u.v.w}{w}.\frac{dw}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v.w.\frac{du}{dx} + u.w.\frac{dv}{dx} + u.v.\frac{dw}{dx}$

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)
(कक्षा 12)
प्रश्नावली 5.6

यदि प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में x तथा y दिए समीकरणों द्वारा, एक दूसरे से प्राचलिक रूप में संबंधित हों, तो प्राचलों का विलोपन किए बिना, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:
$x = 2at^2, y = at^4$

उत्तर 1:
यहाँ, $x = 2at^2, y = at^4$
इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 2a(2t)$ तथा $\frac{dy}{dt} = a(4t^3)$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4at^3}{4at} = t^2$$

प्रश्न 2:
$x = a\cos\theta, y = b\cos\theta$

उत्तर 2:
यहाँ, $x = a\cos\theta, y = b\cos\theta$
इसलिए, $\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta)$ तथा $\frac{dy}{d\theta} = b(-\sin\theta)$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-b\sin\theta}{-a\sin\theta} = \frac{b}{a}$$

प्रश्न 3:
$x = \sin t, y = \cos 2t$

उत्तर 3:
यहाँ, $x = \sin t\ , y = \cos 2t$
इसलिए, $\frac{dx}{dt} = \cos t$ तथा $\frac{dy}{dt} = -\sin 2t\,.2$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{\cot t} = -\frac{2(2\sin t\cos t)}{\cos t} = -4\sin t$$

प्रश्न 4:
$x = 4t, y = \frac{4}{t}$

उत्तर 4:
यहाँ, $x = 4t, y = \frac{4}{t}$
इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 4$ तथा $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4}{t^2}}{4} = -\frac{1}{t^2}$$

प्रश्न 5:

$x=\cos\theta-\cos 2\theta\,, y=\sin\theta-\sin 2\theta$

उत्तर 5:

यहाँ, $x=\cos\theta-\cos 2\theta\,, y=\sin\theta-\sin 2\theta$

इसलिए, $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+2\sin 2\theta$ तथा $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-2\cos 2\theta$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{-\sin\theta+2\sin 2\theta}$$

प्रश्न 6:

$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1+\cos\theta)$

उत्तर 6:

यहाँ, $x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1+\cos\theta)$

इसलिए, $\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$ तथा $\frac{dy}{d\theta}=a(0-\sin\theta)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-a\sin\theta)}{a(1-\cos\theta)}=-\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=-\cot\frac{\theta}{2}$$

प्रश्न 7:

$x=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

उत्तर 7:

यहाँ, $x=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

इसलिए, $\frac{dx}{dt}=\frac{\sin^3 t\frac{d}{dt}\sqrt{\cos 2t}-\sqrt{\cos 2t}\frac{d}{dt}\sin^3 t}{\left(\sqrt{\cos 2t}\right)^2}$

$$=\frac{\sin^3 t.\frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}.(-\sin 2t).2-\sqrt{\cos 2t}.3\sin^2 t\cos t}{\cos 2t}=\frac{-\sin^3 t.\sin 2t-3\cos 2t.\sin^2 t\cos t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

तथा $\frac{dy}{dt}=\frac{\cos^3 t\frac{d}{dt}\sqrt{\cos 2t}-\sqrt{\cos 2t}\frac{d}{dt}\cos^3 t}{\left(\sqrt{\cos 2t}\right)^2}$

$$=\frac{\cos^3 t.\frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}.(-\sin 2t).2-\sqrt{\cos 2t}.3\cos^2 t(-\sin t)}{\cos 2t}=\frac{-\cos^3 t.\sin 2t+3\cos 2t.\cos^2 t\sin t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\cos^3 t\,.\sin 2t+3\cos 2t\,.\cos^2 t\sin t}{-\sin^3 t\,.\sin 2t-3\cos 2t\,.\sin^2 t\cos t}$$

$$=\frac{-\cos^3 t\,.(2\sin t\cos t)+3\cos 2t\,.\cos^2 t\sin t}{-\sin^3 t\,.(2\sin t\cos t)-3\cos 2t\,.\sin^2 t\cos t}=\frac{\cos^2 t\sin t\,(-2\cos^2 t+3\cos 2t)}{\sin^2 t\cos t\,(-2\sin^2 t-3\cos 2t)}$$

$$=\frac{\cos t\,[-2\cos^2 t+3(2\cos^2 t-1)]}{\sin t\,[-2\sin^2 t-3(1-2\sin^2 t)]}=\frac{\cos t\,[-2\cos^2 t+6\cos^2 t-3]}{\sin t\,[-2\sin^2 t-3+6\sin^2 t]}$$

$$=\frac{\cos t\,[4\cos^2 t-3]}{\sin t\,[-3+4\sin^2 t]}=-\frac{4\cos^3 t-3\cos t}{3\sin t-4\sin^3 t}=-\frac{\cos 3t}{\sin 3t}=-\cot 3t$$

प्रश्न 8:

$x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\ y = a\sin t$

उत्तर 8:

यहाँ, $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\ y = a\sin t$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}.\sec^2\frac{t}{2}.\frac{1}{2}\right) = a\left(-\sin t + \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}.\frac{1}{2}\right)$

$= a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right) = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\left(\frac{-\sin^2 t+1}{\sin t}\right) = a\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)$

तथा $\frac{dy}{dt} = a\cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{a\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$$

प्रश्न 9:

$x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$

उत्तर 9:

यहाँ, $x = a\sec\theta, y = b\tan\theta$

इसलिए, $\frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta$

तथा $\frac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{b\sec^2\theta}{a\sec\theta\tan\theta} = \frac{b\sec\theta}{a\tan\theta} = \frac{b\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}{a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)} = \frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$$

प्रश्न 10:

$x = a\,(\cos\theta + \theta\sin\theta), y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

उत्तर 10:

यहाँ, $x = a\,(\cos\theta + \theta\sin\theta), y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

इसलिए, $\frac{dx}{d\theta} = a\,[-\sin\theta + (\theta\cos\theta + \sin\theta)] = a\theta\cos\theta$

तथा $\frac{dy}{d\theta} = a\,[\cos\theta - (-\theta\sin\theta + \cos\theta)] = a\theta\sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

प्रश्न 11:

यदि $x=\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}, y=\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

उत्तर 11:

यहाँ, $x=\sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ \ y=\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$

इसलिए,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}}.\frac{d}{dx}a^{\sin^{-1}t}=\frac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1}t}}}.a^{\sin^{-1}t}.\log a\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2x}.x^2.\log a\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{x\log a}{\sqrt{1-t^2}}$$

तथा

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}}.\frac{d}{dx}a^{\cos^{-1}t}=\frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1}t}}}.a^{\cos^{-1}t}.\log a\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2y}.y^2.\log a\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{y\log a}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{y\log a}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{x\log a}{\sqrt{1-t^2}}}=-\frac{y}{x}$$

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 5.7

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक में दिए फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1:

$x^2 + 3x + 2$

उत्तर 1:

माना $y = x^2 + 3x + 2$, इसलिए,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3 \qquad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x + 3) = 2$

प्रश्न 2:

x^{20}

उत्तर 2:

माना $y = x^{20}$, इसलिए,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{20}) = 20x^{19} \qquad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(20x^{19}) = 380x^{18}$

प्रश्न 3:

$x.\cos x$

उत्तर 3:

माना $y = x.\cos x$, इसलिए,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x.\cos x) = x.\frac{d}{dx}\cos x + \cos x.\frac{d}{dx}x = -x\sin x + \cos x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-x\sin x + \cos x) = -\left(x\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{d}{dx}x\right) - \sin x$

$= -x\cos x - \sin x - \sin x = -(x\cos x + 2\sin x)$

प्रश्न 4:

$\log x$

उत्तर 4:

माना $y = \log x$, इसलिए,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

प्रश्न 5:

$x^3 \log x$

उत्तर 5:

माना $y = x^3 \log x$, इसलिए,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \log x) = x^3.\frac{d}{dx}\log x + \log x.\frac{d}{dx}x^3 = x^3.\frac{1}{x} + \log x.3x^2 = x^2 + 3x^2\log x$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x^2\log x) = 2x + 3\left(x^2\frac{d}{dx}\log x + \log x\frac{d}{dx}x^2\right)$

$= 2x + 3\left(x^2.\frac{1}{x} + \log x.2x\right) = 2x + 3x + 6x\log x = 5x + 6x\log x = x(5 + 6\log x)$

प्रश्न 6:

$e^x \sin 5x$

उत्तर 6:

माना $y = e^x \sin 5x$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \sin 5x) = e^x . \frac{d}{dx} \sin 5x + \sin 5x . \frac{d}{dx} e^x = e^x . \cos 5x . 5 \ + \sin 5x . e^x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(5e^x \cos 5x + e^x \sin 5x)$$

$$= 5\left(e^x . \frac{d}{dx} \cos 5x + \cos 5x . \frac{d}{dx} e^x\right) + \left(e^x . \frac{d}{dx} \sin 5x + \sin 5x . \frac{d}{dx} e^x\right)$$

$$= 5[e^x . (-\sin 5x) . 5 + \cos 5x . e^x] + [e^x . \cos 5x . 5 \ + \sin 5x . e^x]$$

$$= e^x(-25 \sin 5x + 5 \cos 5x + 5 \cos 5x + \sin 5x) = e^x(10 \cos 5x - 24 \sin 5x)$$

प्रश्न 7:

$e^{6x} \cos 3x$

उत्तर 7:

माना $y = e^{6x} \cos 3x$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{6x} \cos 3x) = e^{6x} . \frac{d}{dx} \cos 3x + \cos 3x . \frac{d}{dx} e^{6x}$$

$$= e^{6x} . (-\sin 3x) . 3 \ + \cos 3x . e^{6x} . 6 = 3e^{6x}(-\sin 3x + 2 \cos 3x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[3e^{6x}(-\sin 3x + 2 \cos 3x)]$$

$$= 3e^{6x} . \frac{d}{dx}(-\sin 3x + 2 \cos 3x) + (-\sin 3x + 2 \cos 3x) . \frac{d}{dx} 3e^{6x}$$

$$= 3e^{6x} . (-3 \cos 3x - 6 \sin 3x) + (-\sin 3x + 2 \cos 3x) . 18e^{6x}$$

$$= e^{6x}(-9 \text{ cso } 3x - 18 \sin 3x - 18 \sin 3x + 36 \cos 3x)$$

$$= e^{6x}(27 \cos 3x - 36 \sin 3x) = 9e^{6x}(3 \cos 3x - 4 \sin 3x)$$

प्रश्न 8:

$\tan^{-1} x$

उत्तर 8:

माना $y = \tan^{-1} x$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) = \frac{(1 + x^2)\frac{d}{dx} 1 - 1 . \frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{0 - 2x}{(1 + x^2)^2} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

प्रश्न 9:

$\log(\log x)$

उत्तर 9:

माना $y = \log(\log x)$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log(\log x)) = \frac{1}{\log x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x \log x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x \log x}\right) = \frac{(x \log x)\frac{d}{dx}1 - 1.\frac{d}{dx}(x \log x)}{(x \log x)^2}$$

$$= \frac{0 - \left(x.\frac{1}{x} + \log x\right)}{(x \log x)^2} = -\frac{1 + \log x}{(x \log x)^2}$$

प्रश्न 10:

$\sin(\log x)$

उत्तर 10:

माना $y = \sin(\log x)$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin(\log x)) = \cos(\log x).\frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(\log x)}{x}\right] = \frac{x\frac{d}{dx}\cos(\log x) - \cos(\log x).\frac{d}{dx}x}{(x)^2}$$

$$= \frac{x\left\{-\sin(\log x).\frac{1}{x}\right\} - \cos(\log x).1}{(x)^2} = \frac{-\sin(\log x) - \cos(\log x)}{(x)^2}$$

प्रश्न 11:

यदि $y = 5\cos x - 3\sin x$, है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

उत्तर 11:

दिया है: $y = 5\cos x - 3\sin x$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5\cos x - 3\sin x) = -5\sin x - 3\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-5\sin x - 3\cos x) = -5\cos x + 3\sin x = -(5\cos x - 3\sin x) = -y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

प्रश्न 12:

यदि $y = \cos^{-1} x$, है तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ को केवल y के पदों में ज्ञात कीजिए।

उत्तर 12:

दिया है: $y = \cos^{-1} x \quad \Rightarrow \cos y = x$, इसलिए,

$$-\sin y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\operatorname{cosec} y$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -(-\operatorname{cosec} y \cot y).\frac{dy}{dx} = (\operatorname{cosec} y \cot y).(-\operatorname{cosec} y) = -\operatorname{cosec}^2 y \cot y$$

प्रश्न 13:

यदि $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ है तो दर्शाइए कि $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

उत्तर 13:

दिया है: $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)) = -3\sin(\log x).\frac{1}{x} + 4\cos(\log x).\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}[-3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)]$$

$$= -3\cos(\log x).\frac{1}{x} - 4\sin(\log x).\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}[3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)] = -\frac{1}{x}.y$$

$$\Rightarrow x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y \qquad \Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -y \qquad \Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0$$

प्रश्न 14:

यदि $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$

उत्तर 14:

दिया है: $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Ae^{mx} + Be^{nx}) = mAe^{mx} + nBe^{nx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(mAe^{mx} + nBe^{nx}) = m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny$ में $\frac{d^2y}{dx^2}$ और $\frac{dy}{dx}$ का मान रखने पर

$$LHS = (m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx}) - (m+n)(mAe^{mx} + nBe^{nx}) + mny$$

$$= m^2Ae^{mx} + n^2Be^{nx} - (m^2Ae^{mx} + mnBe^{nx} + mnAe^{mx} + n^2Be^{nx}) + mny$$

$$= -(mnAe^{mx} + mnBe^{nx}) + mny$$

$$= -mn(Ae^{mx} + Be^{nx}) + mny$$

$$= -mny + mny = 0 = RHS$$

प्रश्न 15:

यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ है।

उत्तर 15:

दिया है: $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(500e^{7x} + 600e^{-7x}) = 500e^{7x}.7 + 600e^{-7x}.(-7) = 7(500e^{7x} - 600e^{-7x})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}7(500e^{7x} - 600e^{-7x}) = 7[500e^{7x}.7 + 600e^{-7x}.(-7)]$$

$$= 49(500e^{7x} - 600e^{-7x}) = 49y \qquad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 49y$$

प्रश्न 16:

यदि $e^y(x+1)=1$ है तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ है।

उत्तर 16:

दिया है: $e^y(x+1)=1$, इसलिए,

$$e^y\frac{dy}{dx}(x+1)+(x+1)\frac{d}{dx}e^y=\frac{d}{dx}1$$

$$\Rightarrow e^y+(x+1)e^y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\left[\frac{(x+1).\frac{d}{dx}1-1.\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}\right]=-\left[\frac{0-1}{(x+1)^2}\right]=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{1}{x+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

प्रश्न 17:

यदि $y=(\tan^{-1}x)^2$ है तो दर्शाइए कि $(x^2+1)^2y_2+2x(x^2+1)y_1=2$ है।

उत्तर 17:

दिया है: $y=(\tan^{-1}x)^2$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[(\tan^{-1}x)^2]=2\tan^{-1}x.\frac{1}{1+x^2}=\frac{2\tan^{-1}x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\frac{dy}{dx}=2\tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}.\frac{d}{dx}(1+x^2)=\frac{d}{dx}(2\tan^{-1}x)$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}.2x=\frac{2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2$$

$$\Rightarrow (x^2+1)^2y_2+2x(x^2+1)y_1=2$$

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)
(कक्षा 12)
प्रश्नावली 5.8

प्रश्न 1:
फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।
उत्तर 1:
दिया गया फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$
(i) फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[-4, 2]$ में संतत है।
(ii) $f'(x) = 2x + 2$
अतः, फलन f विवृत अंतराल $(-4, 2)$ में अवकलनीय है।
(iii) $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$
तथा $f(2) = (2)^2 + 2(2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$
$\Rightarrow f(-4) = f(2)$
यहाँ, रोले की तीनों परिस्थितियाँ सत्य हैं। इसलिए, विवृत अंतराल $(-4, 2)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि $f'(c) = 0$ है।
$\Rightarrow f'(c) = 2c + 2 = 0$
$\Rightarrow c = -1 \in (-4, 2)$
अतः, फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$ के लिए रोले की प्रमेय सत्यापित हो जाती है।

प्रश्न 2:
जाँच कीजिए कि क्या रोले का प्रमेय निम्नलिखित फलनों में से किन-किन पर लागू होता है। इन उदाहरणों से क्या आप रोले के प्रमेय के विलोम के बारे में कुछ कह सकते हैं?
(i) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5, 9]$
(ii) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [-2, 2]$
(iii) $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1, 2]$
उत्तर 2:
रोले का प्रमेय फलन $f: [a, b] \to R$ में तभी लागू होता है। जब रोले की निम्नलिखित तीनों परिस्थितियाँ सत्य हों।
(i) फलन f संवृत अंतराल $[a, b]$ में संतत हो।
(ii) फलन f विवृत अंतराल (a, b) में अवकलनीय हो।
(iii) $f(a) = f(b)$ हो।
(i) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5, 9]$
फलन f संवृत अंतराल $[5, 9]$ में न संतत है, न ही विवृत अंतराल $(5, 9)$ में अवकलनीय है और $f(5) \neq f(9)$ है।
अतः, रोले का प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।
(ii) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [-2, 2]$
फलन f संवृत अंतराल $[-2, 2]$ में न संतत है, न ही विवृत अंतराल $(-2, 2)$ में अवकलनीय है और $f(-2) \neq f(2)$ है।
अतः, रोले का प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।
(iii) $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1, 2]$
फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $1, 2]$ में संतत है।
$f'(x) = 2x$, अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1, 2)$ में अवकलनीय है।
$f(1) = (1)^2 - 1 = 0$ तथा $f(2) = (2)^2 - 1 = 3$,
$\Rightarrow f(1) \neq f(2)$
अतः, रोले का प्रमेय $f(x) = x^2 - 1$ पर लागू नहीं होता है।

प्रश्न 3:
यदि $f : [-5, 5] \to \boldsymbol{R}$ एक संतत अवकल फलन है और यदि $f'(x)$ किसी भी बिंदु पर शून्य नहीं होता है तो सिद्ध कीजिए कि $f(-5) \neq f(5)$

उत्तर 3:
$f : [-5, 5] \to \boldsymbol{R}$ एक संतत अवकल फलन है। अतः,
(i) फलन f संवृत अंतराल $[-5, 5]$ में संतत है।
(ii) फलन f विवृत अंतराल $(-5, 5)$ में अवकलनीय है।
माध्यमान प्रमेय के अनुसार, विवृत अंतराल $(-5, 5)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(-5)}{5 - (-5)}$$

परन्तु, दिया है कि $f'(x)$ किसी भी बिंदु पर शून्य नहीं है। अतः,

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(-5)}{5 - (-5)} \neq 0$$

$\Rightarrow f(5) - f(-5) \neq 0$
$\Rightarrow f(5) \neq f(-5)$

प्रश्न 4:
माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अंतराल $[a, b]$ में $f(x) = x^2 - 4x - 3$ जहाँ $a = 1$ और $b = 4$ है।

उत्तर 4:
दिया गया फलन $f(x) = x^2 - 4x - 3\,, x \in [1, 4]$
(i) फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[1, 4]$ में संतत है।
(ii) $f'(x) = 2x - 4$
अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1, 4)$ में अवकलनीय है।
माध्यमान प्रमेय के अनुसार, विवृत अंतराल $(1, 4)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

$$\Rightarrow 2c - 4 = \frac{[(4)^2 - 4(4) - 3\,] - [(1)^2 - 4(1) - 3\,]}{3}$$

$$\Rightarrow 2c - 4 = \frac{-3 - (-6)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow 2c = 5 \quad \Rightarrow c = \frac{5}{2} \in (1, 4)$$

अतः, फलन $f(x) = x^2 - 4x - 3\,, x \in [1, 4]$ के लिए माध्यमान प्रमेय सत्यापित हो जाती है।

प्रश्न 5:
माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अंतराल $[a, b]$ में $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, जहाँ $a = 1$ और $b = 3$ है। $f'(c) = 0$ के लिए $c \in (1, 3)$ को ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:
दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x\,, x \in [1, 3]$
(i) फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल $[1, 3]$ में संतत है।
(ii) $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$
अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1, 3)$ में अवकलनीय है।

माध्यमान प्रमेय के अनुसार, विवृत अंतराल $(1,3)$ में किसी ऐसे c का अस्तित्व है कि

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$\Rightarrow 3c^2 - 10c - 3 = \dfrac{[(3)^3 - 5(3)^2 - 3(3)] - [(1)^3 - 5(1)^2 - 3(1)]}{2}$

$\Rightarrow 3c^2 - 10c - 3 = \dfrac{(27 - 54) - (1 - 8)}{2} = \dfrac{-27 + 7}{2} = -10$

$\Rightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0$

$\Rightarrow 3c^2 - 3c - 7c + 7 = 0$

$\Rightarrow 3c(c - 1) - 7(c - 1) = 0$

$\Rightarrow (c - 1)(3c - 7) = 0$

$\Rightarrow c - 1 = 0$ या $3c - 7 = 0$

$\Rightarrow c = 1$ या $c = \dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow c = \dfrac{7}{3} \in (1,3)$

अतः, फलन $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x, x \in [1,3]$ के लिए माध्यमान प्रमेय सत्यापित हो जाती है।
$f'(c) = 0$ के लिए c का मान $\frac{7}{3}$ है।

प्रश्न 6:

प्रश्न संख्या 2 में उपरोक्त दिए तीनों फलनों के लिए माध्यमान प्रमेय की अनुपयोगिता की जाँच कीजिए।

उत्तर 6:

माध्यमान प्रमेय फलन $f: [a,b] \to \mathrm{R}$ में तभी लागू होता है। जब माध्यमान प्रमेय की निम्नलिखित दोनों परिस्थितियाँ सत्य हों।

(i) फलन f संवृत अंतराल $[a,b]$ में संतत हो।

(ii) फलन f विवृत अंतराल (a,b) में अवकलनीय हो।

(i) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [5,9]$

फलन f संवृत अंतराल $[5,9]$ में न संतत है और न ही विवृत अंतराल $(5,9)$ में अवकलनीय है।
अतः, माध्यमान प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।

(ii) $f(x) = [x]$ के लिए $x \in [-2,2]$

फलन f संवृत अंतराल $[-2,2]$ में न संतत है और न ही विवृत अंतराल $(-2,2)$ में अवकलनीय है।
अतः, माध्यमान प्रमेय $f(x) = [x]$ पर लागू नहीं होता है।

(iii) $f(x) = x^2 - 1$ के लिए $x \in [1,2]$

फलन f एक बहुपद है। अतः, यह संवृत अंतराल 1, 2] में संतत है।

$$f'(x) = 2x$$

अतः, फलन f विवृत अंतराल $(1,2)$ में अवकलनीय है।
अतः, माध्यमान प्रमेय $f(x) = x^2 - 1$ पर लागू होता है।

गणित

(पाठ – 5) (सांतत्य तथा अवकलनीयता)

(कक्षा 12)

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न संख्या 1 से 11 तक प्रदत्त फलनों का, x के सापेक्ष अवकलन कीजिए:

प्रश्न 1:

$(3x^2 - 9x + 5)^9$

उत्तर 1:

माना $y = (3x^2 - 9x + 5)^9$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = 9(3x^2 - 9x + 5)^8 . \frac{d}{dx}(3x^2 - 9x + 5) = 9(3x^2 - 9x + 5)^8 . (6x - 9)$$

$$= 27(3x^2 - 9x + 5)^8 . (2x - 3)$$

प्रश्न 2:

$\sin^3 x + \cos^6 x$

उत्तर 2:

माना $y = \sin^3 x + \cos^6 x$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 x . \frac{d}{dx}\sin x + 6\cos^5 x . \frac{d}{dx}\cos x = 3\sin^2 x . \cos x + 6\cos^5 x . (-\sin x)$$

$$= 3\sin x \cos x (\sin x - 2\cos^4 x)$$

प्रश्न 3:

$(5x)^{3\cos 2x}$

उत्तर 3:

माना $y = (5x)^{3\cos 2x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log y = \log(5x)^{3\cos 2x} = 3\cos 2x . \log 5x$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\cos 2x . \frac{d}{dx}\log 5x + \log 5x . \frac{d}{dx} 3\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[3\cos 2x . \frac{1}{5x} . 5 + \log 5x . 3(-\sin 2x) . 2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3(5x)^{3\cos 2x}\left[\frac{\cos 2x - 2\sin 2x \log 5x}{x}\right]$$

प्रश्न 4:

$\sin^{-1}(x\sqrt{x}), 0 \le x \le 1$

उत्तर 4:

माना $y = \sin^{-1}(x\sqrt{x})$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x\sqrt{x})^2}} . \frac{d}{dx}(x\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} . \left[x\frac{d}{dx}\sqrt{x} + \sqrt{x} . \frac{d}{dx}x\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} . \left[x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} . 1\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} . \left[\frac{x + 2x}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{3x}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1 - x^3}}$$

प्रश्न 5:

$\frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}, -2 < x < 2.$

उत्तर 5:

माना $y = \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}.\frac{d}{dx}\sqrt{2x+7} - \sqrt{2x+7}\frac{d}{dx}\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\left(\sqrt{2x+7}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\cos^{-1}\frac{x}{2}.\frac{1}{2\sqrt{2x+7}}.2\right] - \sqrt{2x+7}\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}.\frac{1}{2}}{2x+7}$$

$$= \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}.\frac{1}{\sqrt{2x+7}} + \sqrt{2x+7}\frac{1}{\sqrt{4-(x)^2}}}{2x+7} = \frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}.\sqrt{4-x^2} + 2x+7}{(2x+7)\sqrt{2x+7}\sqrt{4-x^2}}$$

प्रश्न 6:

$\cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right], 0 < x < \frac{\pi}{2}$

उत्तर 6:

माना $y = \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right]$, इसलिए,

$$y = \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} + \sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \sqrt{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right]$$

$$= \cot^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right] = \cot^{-1}\left[\frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right] = \cot^{-1}\left[\cot\frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2}$$

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 7:

$(\log x)^{\log x}, x > 1$

उत्तर 7:

माना $y = (\log x)^{\log x}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log y = \log(\log x)^{\log x} = \log x\,.\log(\log x)$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x\,.\frac{d}{dx}\log(\log x) + \log(\log x)\,.\frac{d}{dx}\log x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\log x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log(\log x) \cdot \frac{1}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\log x}\left[\frac{1 + \log(\log x)}{x}\right]$$

प्रश्न 8:

$\cos(a\cos x + b\sin x)$, किन्हीं अचर a तथा b के लिए

उत्तर 8:

माना $y = \cos(a\cos x + b\sin x)$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(a\cos x + b\sin x) \cdot \frac{d}{dx}(a\cos x + b\sin x)$$

$$= -\sin(a\cos x + b\sin x)\,(-a\sin x + b\cos x)$$

$$= \sin(a\cos x + b\sin x)\,(a\sin x - b\cos x)$$

प्रश्न 9:

$(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

उत्तर 9:

माना $y = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log y = \log(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)} = (\sin x - \cos x).\log(\sin x - \cos x)$

इसलिए,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x - \cos x).\frac{d}{dx}\log(\sin x - \cos x) + \log(\sin x - \cos x) \cdot \frac{d}{dx}(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[(\sin x - \cos x).\frac{(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)} + \log(\sin x - \cos x)\,(\cos x + \sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)}(\cos x + \sin x)[1 + \log(\cos x - \sin x)]$$

प्रश्न 10:

$x^x + x^a + a^x + a^a$, किसी नियत $a > 0$ तथा $x > 0$ के लिए

उत्तर 10:

माना $u = x^x$ तथा $y = u + x^a + a^x + a^a$ इसलिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}x^a + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}a^x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}a^a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + ax^{a-1} + a^x\log a + 0 \qquad \dots(1)$$

यहाँ, $u = x^x$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = \log x^x = x.\log x$

इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{d}{dx}\log x + \log x \cdot \frac{d}{dx}x = x.\frac{1}{x} + \log x \cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$$

समीकरण (1) में $\frac{du}{dx}$ का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \log x) + ax^{a-1} + a^x \log a$$

प्रश्न 11:

$x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}, x > 3$ के लिए

उत्तर 11:

माना $u = x^{x^2-3}$ तथा $v = (x-3)^{x^2}$ इसलिए, $y = u + v$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{... (1)}$$

यहाँ, $u = x^{x^2-3}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log u = (x^2 - 3) \log x$, इसलिए,

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = (x^2 - 3).\frac{d}{dx}\log x + \log x . \frac{d}{dx}(x^2 - 3)$$

$$= (x^2 - 3).\frac{1}{x} + \log x . 2x$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[\frac{x^2 - 3 + 2x^2 \log x}{x}\right]$$

$$\frac{du}{dx} = x^{x^2-3}\left[\frac{x^2 - 3 + 2x^2 \log x}{x}\right] = x^{x^2-4}(x^2 - 3 + 2x^2 \log x) \quad \text{... (2)}$$

तथा, $v = (x-3)^{x^2}$, दोनों ओर log लेने पर

$\log v = x^2 \log(x-3)$, इसलिए,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x^2.\frac{d}{dx}\log(x-3) + \log(x-3) . \frac{d}{dx}x^2$$

$$= x^2.\frac{1}{x-3} + \log(x-3) . 2x$$

$$= \frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)\right]$$

$$= (x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)\right] \quad \text{... (3)}$$

समीकरण (2)से $\frac{du}{dx}$ का तथा समीकरण (3)से $\frac{dv}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2-4}(x^2 - 3 + 2x^2 \log x) + (x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3} + 2x.\log(x-3)\right]$$

प्रश्न 12:

यदि $y = 12(1-\cos t),\ x = 10(t - \sin t), -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 12:

यहाँ, $x = 10(t - \sin t)\,, y = 12(1-\cos t)$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = 10(1-\cos t)$ तथा $\frac{dy}{dt} = 12(0+\sin t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12\sin t}{10(1-\cos t)} = \frac{6\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)}{5\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)} = \frac{6}{5}\cot\frac{t}{2}$$

प्रश्न 13:

यदि $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\,, 0 < x < 1$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 13:

यहाँ, $y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}x + \frac{d}{dx}\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x}.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x}.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

प्रश्न 14:

यदि $-1 < x < 1$ के लिए $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

उत्तर 14:

दिया है: $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0 \qquad \Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$x^2(1+y) = y^2(1+x) \qquad \Rightarrow x^2 + x^2y = y^2 + y^2x$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + x^2y - y^2x = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0 \ \Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0$

$\Rightarrow (x+y+xy) = 0 \qquad [\because x \neq y \quad \Rightarrow x - y \neq 0]$

$\Rightarrow y(1+x) = -x$

$\Rightarrow y = -\frac{x}{1+x}$

इसलिए,

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{(1+x)\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}\right] = -\frac{1+x-x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

प्रश्न 15:

यदि किसी $c > 0$ के लिए $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

उत्तर 15:

दिया है: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$, इसलिए,
दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(x-a)^2 + \frac{d}{dx}(y-b)^2 = \frac{d}{dx}c^2$$

$$\Rightarrow 2(x-a) + 2(y-b)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y-b)\frac{d}{dx}(x-a) - (x-a)\frac{d}{dx}(y-b)}{(y-b)^2} = -\frac{(y-b)1 - (x-a)\frac{dy}{dx}}{(y-b)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(y-b)1 - (x-a)\left(-\frac{x-a}{y-b}\right)}{(y-b)^2} = -\frac{(y-b)^2 + (x-a)^2}{(y-b)^3} = -\frac{c^2}{(y-b)^3}$$

$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ में मान रखने पर

$$\frac{\left[1+\left(-\frac{x-a}{y-b}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}} = \frac{\left[1+\frac{(x-a)^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}} = \frac{\left[\frac{(y-b)^2+(x-a)^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}} = \frac{\left[\frac{c^2}{(y-b)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}}$$

$$= \frac{\frac{c^3}{(y-b)^3}}{-\frac{c^2}{(y-b)^3}} = -\frac{c^3}{c^2} = -c,$$ जो a और b से स्वतंत्र एक स्थिर राशि है।

प्रश्न 16:

यदि $\cos y = x\cos(a+y)$, के लिए $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

उत्तर 16:

दिया है: $\cos y = x\cos(a+y)$ $\Rightarrow x = \frac{\cos y}{\cos(a+y)}$, इसलिए,
दोनों पक्षों का y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos(a+y)\frac{d}{dy}\cos y - \cos y\frac{d}{dy}\cos(a+y)}{\cos^2(a+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\cos(a+y)(-\sin y) - \cos y(-\sin(a+y))}{\cos^2(a+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-\sin y\cos(a+y) + \cos y\sin(a+y)}{\cos^2(a+y)} = \frac{\sin(a+y-y)}{\cos^2(a+y)} = \frac{\sin a}{\cos^2(a+y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

प्रश्न 17:

यदि $x = a(\cos t + t\sin t)$ और $y = a(\sin t - t\cos t)$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

उत्तर 17:

यहाँ, $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$

इसलिए, $\frac{dx}{dt} = a[-\sin t + (t\cos t + \sin t)] = at\cos t$ तथा

$$\frac{dy}{dt} = a[(\cos t - (-t\sin t + \cos t))] = at\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t.\frac{dt}{dx} = \sec^2 t.\frac{1}{at\cos t} = \frac{\sec^3 t}{at}$$

प्रश्न 18:

यदि $f(x) = |x|^3$, तो प्रमाणित कीजिए कि $f''(x)$ का आस्तित्व है और इसे ज्ञात भी कीजिए।

उत्तर 18:

$f(x) = |x|^3$ को पुनः व्यवस्थित करके लिखने पर

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

यदि $x \geq 0$, $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow f''(x) = 6x$

यदि $x < 0$, $f(x) = -x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \quad \Rightarrow f''(x) = -6x$

अतः, $f''(x)$ का अस्तित्व सभी वास्तविक संख्याओं के लिए है। इसप्रकार

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{यदि } x \geq 0 \\ -6x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

प्रश्न 19:

गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, सिद्ध कीजिए कि सभी धन पूर्णांक n के लिए $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ है।

उत्तर 19:

माना, $P(n): \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

$n = 1$ रखने पर, $LHS = \frac{d}{dx}(x^1) = 1$ तथा $\text{RHS} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$

अतः, $P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

माना, $P(k): \frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$ सत्य है।

सिद्ध करना है कि $P(k+1): \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = (k+1)x^k$ भी सत्य होगा।

$$LHS = \frac{d}{dx}(x^{k+1}) = \frac{d}{dx}(x^k.x) = x^k\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}x^k$$

$= x^k.1 + x.kx^{k-1} = (1+k)x^k = RHS$, अतः, $P(n), n = k+1$ के लिए भी सत्य है।

इस प्रकार, गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा, $P(n)$ सभी धन पूर्णांक n के लिए सत्य है।

प्रश्न 20:

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ का प्रयोग करते हुए अवकलन द्वारा $cosines$ के लिए योग सूत्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर 20:

दिया है: $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\sin(A+B)=\left(\sin A\frac{d}{dx}\cos B+\cos B\frac{d}{dx}\sin A\right)+\left(\cos A\frac{d}{dx}\sin B+\sin B\frac{d}{dx}\cos A\right)$$

$$\Rightarrow \cos(A+B).\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}\right)$$

$$=\left(\sin A\,(-\sin B)\frac{dB}{dx}+\cos B\cos A\frac{dA}{dx}\right)+\left(\cos A\cos B\frac{dB}{dx}+\sin B\,(-\sin A)\frac{dA}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(A+B).\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}\right)$$

$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\frac{dB}{dx}+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\frac{dA}{dx}$$

$$\Rightarrow \cos(A+B).\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}\right)=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\left(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

प्रश्न 21:

क्या एक ऐसे फलन का अस्तित्व है, जो प्रत्येक बिंदु पर संतत हो किंतु केवल दो बिंदुओं पर अवकलनीय न हो? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 21:

फलन $f(x)=|x-1|+|x-3|$ प्रत्येक बिंदु पर संतत है किंतु केवल दो बिंदुओं ($x=1$ तथा $x=3$) पर अवकलनीय नहीं है।

प्रश्न 22:

यदि $y=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ l & m & n\\ a & b & c\end{vmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x)\\ l & m & n\\ a & b & c\end{vmatrix}$

उत्तर 22:

दिया है: $y=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ l & m & n\\ a & b & c\end{vmatrix}$, इसलिए,

$$\frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x)\\ l & m & n\\ a & b & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ \frac{dl}{dx} & \frac{dm}{dx} & \frac{dn}{dx}\\ a & b & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ l & m & n\\ \frac{da}{dx} & \frac{db}{dx} & \frac{dc}{dx}\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x)\\ l & m & n\\ a & b & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ 0 & 0 & 0\\ a & b & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x)\\ l & m & n\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x)\\ l & m & n\\ a & b & c\end{vmatrix}+0+0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x)\\ l & m & n\\ a & b & c\end{vmatrix}$$

प्रश्न 23:

यदि $y = e^{a\cos^{-1}x}, -1 \le x \le 1$, तो दर्शाइए कि $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$

उत्तर 23:

दिया है: $y = e^{a\cos^{-1}x}$, इसलिए,

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^{a\cos^{-1}x} = e^{a\cos^{-1}x}\frac{d}{dx}a\cos^{-1}x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x}a.\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2y^2}{1-x^2} \qquad \Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2y^2$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$(1-x^2).2\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d}{dx}(1-x^2) = a^2 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(-2x)\right] = 2a^2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}\right] = 2a^2y\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = a^2y$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$