अध्याय-13

प्रायिकता

(Probability)

(Important Formulae and Definitions)

1. किसी घटना E के होने की प्रायिकता $P(E) = \frac{S(E)}{S(P)} = \frac{\text{अनुकूल परिस्थितियाँ}}{\text{कुल परिस्थितियाँ}}$, जहाँ $S(E)$ = घटना E को निरूपित करने वाले बिन्दुओं की संख्या, $S(P)$ = प्रतिदर्श-समष्टि के प्रतिदर्श-बिन्दुओं की कुल संख्या।
2. यदि $\bar{A}$ एक घटना हो और A उसकी पूरक घटना हो, तो $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
3. यदि E_1 तथा E_2 किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ हैं तो मिश्र घटना (E) दोनों घटनाओं के सर्वनिष्ठ के बराबर होगी अर्थात्

$$E = (E_1 \cap E_2)$$

4. एक घटना E, a प्रकार से घट सकती है और b प्रकार से नहीं घट सकती है तो

$$\text{घटना के घटने की प्रायिकता} = \frac{a}{a+b} = P(E)$$

$$\text{घटना के न घटने की प्रायिकता} = \frac{b}{a+b} = P(\bar{E})$$

यहाँ $P(E) + P(\bar{E}) = 1$.

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाएँ E_1 तथा E_2 हैं तथा $P(E_1) \neq 0$

तब $$P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_1)}$$

तथा $$P\left(\frac{E_2}{E_1'}\right) = \frac{n(E_1' \cap E_2)}{n(E_1')}$$

7. यादृच्छिक चर का माध्य $M = \Sigma P_i x_i$
जहाँ यादृच्छिक चर $X = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
तथा इनकी प्रायिकताएँ $= P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n'$.

8. यादृच्छिक चर का प्रसरण $\sigma^2 = \Sigma P_i(x_i - \mu)^2$
9. द्विपद बंटन से

$$\text{सफलताओं की प्रायिकता} = {}^nC_r p^r q^{n-r}$$

जहाँ p तथा q क्रमशः सफलता तथा असफलता की प्रायिकताएँ हैं।
n = स्वतंत्र प्रयास।

प्रश्नावली 13·1

प्रश्न 1. यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0.6$, $P(F) = 0.3$ और $P(E \cap F) = 0.2$, तो $P(E/F)$ और $P(F/E)$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $P(E) = 0.6, P(F) = 0.3, P(E \cap F) = 0.2$

$$\therefore \quad P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}. \qquad \text{उत्तर}$$

$$\text{तथा} \quad P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}. \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 2. $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए कि यदि $P(B) = 0.5$ और $P(A \cap B) = 0.32$.

हल : दिया है : $P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.32$

$$\therefore \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.32}{0.5}$$

$$= \frac{32}{50} = \frac{16}{25}. \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 3. यदि $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.5$ और $P(B/A) = 0.4$ ज्ञात कीजिए

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A/B)$ (iii) $P(A \cup B)$

हल : दिया है : $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5, P(B/A) = 0.4$

(i) $\because$
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$
$$= 0.8 \times 0.4 = 0.32. \qquad \text{उत्तर}$$

(ii)
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.32}{0.5} = \frac{32}{50}$$
$$= \frac{16}{25} = 0.64. \qquad \text{उत्तर}$$

(iii)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.8 + 0.5 - 0.32$$
$$= 1.30 - 0.32 = 0.98. \qquad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 4. $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A/B) = \frac{2}{5}$.

हल : दिया है : $2P(A) = \frac{5}{13}$ या $P(A) = \frac{5}{26}$ तथा $P(B) = \frac{5}{13}$

$\because \quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{2}{13}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{26} + \frac{5}{13} - \frac{2}{13} = \frac{5+10-4}{26}$$

$$= \frac{11}{26}.$$ उत्तर

प्रश्न 5. यदि $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ तो ज्ञात कीजिए।

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A/B)$ (iii) $P(B/A)$

हल : दिया है : $P(A) = \dfrac{6}{11}$, $P(B) = \dfrac{5}{11}$, $P(A \cup B) = \dfrac{7}{11}$

(i) $\because \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \dfrac{7}{11} = \dfrac{6}{11} + \dfrac{5}{11} - P(A \cap B)$

या $\quad P(A \cap B) = \dfrac{6}{11} + \dfrac{5}{11} - \dfrac{7}{11} = \dfrac{4}{11}.$ उत्तर

(ii) $\quad P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{11}}{\frac{5}{11}} = \dfrac{4}{5}.$ उत्तर

(iii) $\quad P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{4}{11}}{\frac{6}{11}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}.$ उत्तर

निम्नलिखित प्रश्न 6 से 9 तक $P(E/F)$ ज्ञात कीजिए :

प्रश्न 6. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है—

(i) E : तीसरी उछाल पर चित, F : पहली दोनों उछालों पर चित।

(ii) E : न्यूनतम दो चित, F : अधिकतम एक चित

(iii) E : अधिकतम दो पट, F : न्यूनतम दो पट।

हल : जब एक सिक्के को तीन बार उछाला जाए, तब प्रतिदर्श समष्टि,

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

(i) 3 सिक्के उछालने पर तीसरी उछाल पर चित आता है जो निम्न चार तरीकों से आ सकता है—

$$\{HHH, HTH, THH, TTH\}$$

$\therefore \quad E = \{HHH, HTH, THH, TTH\}$

F : पहली दो उछालों पर चित आता है।

$$= \{HHH, HHT\}$$

$$E \cap F = \{HHH\}$$

अब $$P(E \cap F) = \frac{1}{8},\ P(F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ P(E) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

(ii) E : 3 उछालों में न्यूनतम अर्थात् कम-से-कम दो चित आना

$$= (HHT, HTH, THH, HHH)$$

F : तीन उछालों में अधिकतम 2 चित आना

$$= \{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH\}$$

$$E \cap F = \{HHT, HTH, THH\}$$

अर्थात् $$P(E \cap F) = \frac{3}{8},\ P(F) = \frac{7}{8}$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{3}{7}.$$ उत्तर

(iii) E : अधिकतम 2 पट

$$= \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT\}$$

F : न्यूनतम 2 पट $= \{THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT, TTT\}$

$$E \cap F = \{THH, HTH, HHT, TTH, THT, HTT\}$$

$$P(E \cap F) = \frac{6}{8}, P(F) = \frac{7}{8}$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{6}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{6}{7}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है—

(i) E : एक सिक्के पर पट प्रकट होता है।

F : एक सिक्के पर चित प्रकट होता है।

(ii) E : कोई पट प्रकट नहीं होता है।

F : कोई चित प्रकट नहीं होता।

हल : (i) दो सिक्कों को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि,

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ अर्थात् $n(S) = 4$

E : एक सिक्के पर पट प्रकट होना

$= \{HT, TH\}$ अर्थात् $n(E) = 2$

अर्थात् $$P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

F : एक सिक्के पर चित प्रकट होना

$= \{HT, TH\}$ अर्थात् $n(F) = 2$

$$P(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$E \cap F = \{HT, TH\}$$

अर्थात् $n(E \cap F) = 2$

$\therefore$ $P(E \cap F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

अत: $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$ उत्तर

(ii) E : कोई पट प्रकट होता = $\{HH\}$

F : कोई चित प्रकट नहीं होता = $\{TT\}$

$\therefore$ $E \cap F = \phi = \{\ \}$

अर्थात् $n(E \cap F) = 0$

अर्थात् $P(E \cap F) = 0, P(F) = \frac{1}{4}, P(E) = \frac{1}{4}$

$\therefore$ $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = 0 \div \frac{1}{4} = 0.$ उत्तर

प्रश्न 8. एक पासे को तीन बार उछाला गया है—

(i) E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होना।

F : पहली दो उछालों पर क्रमश: 6 तथा 5 प्रकट होना।

हल : एक पासे को 3 बार उछाला गया।

$\therefore$ प्रतिदर्श समष्टि में कुल परिणामों की संख्या = 216

E : तीसरी उछाल पर संख्या 4 प्रकट होती है।

$= \{(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4), (1, 5, 4), (1, 6, 4),$
$(2, 1, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (2, 5, 4), (2, 6, 4),$
$(3, 1, 4) (3, 2, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (3, 5, 4), (3, 6, 4),$
$(4, 1, 4), (4, 2, 4), (4, 3, 4), (4, 4, 4), (4, 5, 4), (4, 6, 4),$
$(5, 1, 4), (5, 2, 4), (5, 3, 4), (5, 4, 4), (5, 5, 4), (5, 6, 4),$
$(6, 1, 4), (6, 2, 4), (6, 3, 4), (6, 4, 4), (6, 5, 4), (6, 6, 4)\}$

= 36 परिणाम

F = पहली दो उछालों पर क्रमश: 6 तथा 5 प्रकट होना

$= \{(6, 5, 1), (6, 5, 2), (6, 5, 3), (6, 5, 4), (6, 5, 5), (6, 5, 6)\}$

= 6 परिणाम

$$E \cap F = (6, 5, 4)$$

$\therefore$ $P(E \cap F) = \frac{1}{216}, P(F) = \frac{6}{216}$

अत: $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{216} + \frac{6}{216} = \frac{1}{6}.$ उत्तर

प्रश्न 9. एक पारिवारिक चित्र में माता, पिता व पुत्र यादृच्छया खड़े हैं—

(i) E : पुत्र एक सिरे पर खड़ा है।

F : पिता मध्य में खड़े हैं।

हल : मान लीजिए पुत्र, माता तथा पिता के क्रमशः s, m, f से व्यक्त किया जाए तो इनका प्रतिदर्श समष्टि होगा

$$S = (s, m, f), (s, f, m), (m, f, s), (m, s, f), (f, m, s), (f, s, m)$$

अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि के 6 परिणाम हैं।

E = पुत्र एक सिरे पर खड़ा है।

$$= \{(s, m, f), (s, f, m), (m, f, s), (f, m, s)\}$$

अर्थात् $n(E) = 4$ इसलिए $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

F : पिता मध्य में खड़े हैं।

$$= \{(m, f, s), (s, f, m)\}$$

अर्थात् $n(F) = 2$ इसलिए $P(F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$$\therefore \quad E \cap F = \{(m, f, s), (s, f, m)\}$$

$$\Rightarrow \quad n(E \cap F) = 2$$

$$\therefore \quad P(E \cap F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

अतः $P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{3} = 1.$ उत्तर

प्रश्न 10. एक काले और लाल पासे को उछाला गया है—

(a) पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 9 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि काले पासे पर 5 प्रकट हुआ है।

(b) पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 8 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात हो कि लाल पासे पर प्रकट संख्या 4 से कम है।

हल—जब दो पासे फेंके जाते हैं तो प्रतिदर्श समष्टि, $S = 6 \times 6 = 36$

(a) मान लीजिए A : पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग = 9

$$= \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

B : काले पासे पर 5 प्रकट होता है।

$$= \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$$

$\therefore$ $n(B) = 6$ इसलिए $P(B) = \frac{6}{36}$

$$A \cap B = \{(5, 4)\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\therefore \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{1}{36} \div \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$ उत्तर

(b) मान लीजिए A = पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग = 8

$= \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

और B = लाल पासे पर प्रकट संख्या 4 से कम है।

= लाल पासे पर संख्या 1, 2, 3 प्रकट हो सकती है।

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

$n(B) = 18$

अर्थात् $$P(B) = \frac{18}{36}$$

$A \cap B = \{(2, 6), (3, 5)\}$ अर्थात् $n(A \cap B) = 2$

$\therefore$ $$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$\therefore$ $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{2}{36} \div \frac{18}{36} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$ उत्तर

प्रश्न 11. एक न्याय्य पासे को उछाला गया है। घटनाओं $E = \{1, 3, 5\}$, $F = \{2, 3\}$ और $G = \{2, 3, 4, 5\}$ के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए—

(i) $P(E/F)$ और $P(F/E)$ (ii) $P(E/G)$ और $P(G/E)$

(iii) $P(E \cup F/G)$ और $P(E \cap F/G)$

हल—एक पासे को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 प्रकट हो सकता है।

अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि के 6 परिणाम हैं। $\therefore n(S) = 6$

$E = \{1, 3, 5\}, F = \{2, 3\}, G = \{2, 3, 4, 5\}$

(i) $E \cap F = \{3\}$ अर्थात् $n(E \cap F) = 1$

$\therefore$ $$P(E \cap F) = \frac{1}{6},\ P(E) = \frac{3}{6},\ P(F) = \frac{2}{6}$$

अब $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

$$P\left(\frac{F}{E}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 12. मान लें कि जन्म लेने वाले बच्चे का लड़का या लड़की होना समसम्भाव्य है। यदि किसी परिवार में दो बच्चे हैं, तो दोनों बच्चों के लड़की होने की सप्रतिबन्ध प्रायिकता क्या है, यदि यह दिया गया है कि (i) सबसे छोटा बच्चा लड़की है (ii) न्यूनतम एक बच्चा लड़की है।

हल : मान लीजिए कि लड़कों को B_1, B_2 और लड़कियों को G_1, G_2 से व्यक्त करें तो

प्रतिदर्श समष्टि $= \{(B_1, B_2), (B_1, G_2), (G_1, B_2), (G_1, G_2)\}$

E = दोनों बच्चे लड़कियाँ हैं $= \{G_1, G_2\}$

F = छोटा बच्चा लड़की है $= \{(G_1, G_2), (B_1, G_2)\}$

G = न्यूनतम एक बच्चा लड़की है

$$= \{(G_1, B_2), (G_1, G_2), (B_1, G_2)\}$$

(i) $$E \cap F = (G_1, G_2), P(E \cap F) = \frac{1}{4}, P(F) = \frac{2}{4}$$

$\therefore$ $$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

(ii) $$E \cap G = (G_1, G_2), P(E \cap G) = \frac{1}{4}, P(G) = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ $$P(E/G) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)} = \frac{1}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 13. एक प्रशिक्षक के पास 300 सत्य/असत्य प्रकार के आसान प्रश्न, 200 सत्य/असत्य प्रकार के कठिन प्रश्न, 500 बहु-विकल्पीय प्रकार के आसान प्रश्न और 400 बहुविकल्पीय प्रकार के कठिन प्रश्नों का संग्रह है। यदि प्रश्नों के संग्रह से एक प्रश्न यादृच्छया चुना जाता है, तो एक आसान प्रश्न की बहु-विकल्पीय होने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : कुल प्रश्नों की संख्या = 300 + 200 + 500 + 400 = 1400

माना आसान तथा बहुविकल्पीय प्रश्नों को क्रमशः E तथा F से व्यक्त करें, तब

$$n(E) = 300 + 500 = 800$$

और $$n(F) = 500 + 400 = 900$$

$\therefore E \cap F$: 'आसान बहु-विकल्पीय प्रश्न' अर्थात् $n(E \cap F) = 500$

या $$P(E \cap F) = \frac{500}{1400}$$

और $$P(F) = \frac{900}{1400}$$

अतः $$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{500/1400}{900/1400}$$

$$= \frac{5}{9}.$$ उत्तर

प्रश्न 14. यदि दिया गया है कि दो पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : दो पासों को उछालने से प्रतिदर्श समष्टि, $S = 6 \times 6 = 36$

मान लीजिए A = दो संख्याओं का योग 4 है।

$$= \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$ अर्थात् $n(A) = 3$

दो पासों की उछाल में समान संख्या वाले परिणाम

$$= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

B = जब संख्या भिन्न हो तो ऐसे परिणाम = 36 – 6 = 30

$$A \cap B = \{(1, 3), (3, 1)\}$$ अर्थात् $n(A \cap B) = 2$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}, P(B) = \frac{30}{36}$$

अत: $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{2}{36} \div \frac{30}{36} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$ उत्तर

प्रश्न 15. एक पासे को फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। यदि पासे पर प्रकट संख्या 3 का गुणज है तो पासे को पुनः फेंकें और यदि कोई अन्य संख्या प्रकट हो तो एक सिक्के को उछालें। घटना न्यूनतम एक पासे पर संख्या 3 प्रकट होना दिया गया है तो घटना 'सिक्के पर पट प्रकट होने' की सप्रतिबन्ध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : यदि पासे और सिक्के को उछाले तो

परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (4, H), (4, T), (5, H), (5, T)\}$

$\therefore$ $n(S) = 20$

मान लीजिए E = सिक्का पर पट आने की घटना.

$= \{(1, T), (2, T), (4, T), (5, T)\}$

और F = कम-से-कम एक पासे पर 3 का प्रकट होना

$= \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 3)\}$

अर्थात् $n(F) = 7, E \cap F = \phi$

$\therefore$ $P(F) = \frac{7}{20}$ और $P(E \cap F) = \frac{0}{20}$

अत: $$P\left(\frac{E}{F}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0/20}{7/20} = 0.$$ उत्तर

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर चुनिए :

प्रश्न 16. यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$, $P(A/B)$ है—

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$

(C) परिभाषित नहीं (D) 1

हल : $P(A) = \frac{1}{2}$ तथा $P(B) = 0$

$\therefore$ $$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{0} = \infty$$

= परिभाषित नहीं।

अत: विकल्प (C) सही है। उत्तर

प्रश्न 17. यदि A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$ तब

(A) $A \subset B$ (B) $A = B$

(C) $A \cap B = \phi$ (D) $P(A) = P(B)$

हल : दिया है, $$P\left(\frac{A}{B}\right) = P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

या $$P(A) = P(B)$$

अत: विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

प्रश्नावली 13·2

प्रश्न 1. यदि $P(A) = \frac{3}{5}$ और $P(B) = \frac{1}{5}$, और A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए।

हल : जब A और B स्वतन्त्र घटनाएँ हों, तब

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए। दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52

काले रंग वाले पत्तों की संख्या = 26

काले रंग वाला पत्ता निकालने की प्रायिकता

$$\therefore \quad P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

एक पत्ता निकालने के बाद गड्डी में 51 पत्ते हैं जिनमें 25 काले पत्ते हैं।

$\therefore$ दूसरा काला वाला पत्ता निकालने की प्रायिकता = $\frac{25}{51}$

अत: बिना प्रतिस्थापन किए दो काले पत्ते निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{25}{51} = \frac{25}{102}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 3. सन्तरों के एक डिब्बे का निरीक्षण उसमें से तीन सन्तरों को यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए हुए निकाल कर किया जाता है। यदि तीनों निकाले गए सन्तरे अच्छे हों तो डिब्बे को बिक्री के लिए स्वीकृत किया जाता है अन्यथा अस्वीकृत कर देते हैं। एक डिब्बा जिसमें 15 सन्तरे हैं जिनमें से 12 अच्छे व 3 खराब सन्तरे हैं, के बिक्री के लिए स्वीकृत होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : डिब्बे में कुल सन्तरों की संख्या = 15

अच्छे सन्तरों की संख्या = 12

कुल संतरों में से 1 अच्छे संतरे को निकालने की प्रायिकता = $\frac{12}{15}$

इसी प्रकार दूसरे अच्छे संतरे के निकालने की प्रायिकता = $\frac{11}{14}$

और तीसरे अच्छे संतरे के निकालने की प्रायिकता = $\frac{10}{13}$

अत: $$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{12}{15} \times \frac{11}{14} \times \frac{10}{13} = \frac{44}{91}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 4. एक न्याय्य सिक्का और एक अभिनत पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'सिक्के पर चित प्रकट होता है' और B घटना 'पासे पर संख्या 3 प्रकट होती है' को निरूपित करते हैं। निरीक्षण कीजिए कि घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं या नहीं ?

हल : दिया है, यदि सिक्का और पासा उछाला जाता है तो प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$$

$$\Rightarrow \quad n(S) = 12$$

चूँकि घटना A 'सिक्के पर चित को प्रकट होना' व्यक्त करता हो, तब

$$A = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)\}$$

अर्थात् $\quad n(A) = 6$

अब $\quad P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2},$

तथा $\quad B = \{(H, 3), (T, 3)\}$ अर्थात् $n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$$

$\therefore \quad A \cap B = \{(H, 3)\}$ अर्थात् $n(A \cap B) = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$\therefore \quad P(A). P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$$

अत: A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. एक पासे पर 1, 2, 3 लाल रंग से और 4, 5, 6 हरे रंग से लिखे गए हैं। इस पासे को उछाला गया। मान लें A घटना 'संख्या सम है' और B घटना 'संख्या लाल रंग से लिखी गई है' को निरूपित करते हैं। क्या A और B स्वतन्त्र हैं ?

हल : दिया है : घटना A सम संख्या है = {2, 4, 6} अर्थात् $n(A) = 3$

प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ अर्थात् $n(S) = 6$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अब 1, 2, 3 को लाल रंग से और 4, 5, 6 को हरे रंग से लिखा गया है।

घटना B : संख्या लाल रंग से लिखी गई है अर्थात् $n(B) = 3$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B$: संख्या 2 जो सम भी है ओर लाल रंग से लिखी है।

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

अब $\quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{4}$$

अर्थात् $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

अत: A और B स्वतन्त्र नहीं हैं। उत्तर

प्रश्न 6. मान लें E तथा F दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ और $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$, तब क्या E तथा F स्वतन्त्र हैं ?

हल : दिया है, $P(E) = \frac{3}{5}$ तथा $P(F) = \frac{3}{10}$

$\therefore$ $$P(E) \times P(F) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$$

तथा $$P(E \cap F) = \frac{1}{5}$$

$$P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

अत: E और F स्वतन्त्र नहीं हैं। उत्तर

प्रश्न 7. A और B ऐसी घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ तथा $P(B) = p \cdot p$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं, (ii) घटनाएँ स्वतंत्र हैं।

हल : दिया है, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = p$ और $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$

(i) यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं तो $P(A \cap B) = 0$

सूत्रानुसार, $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + p - 0$$

$\therefore$ $$p = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}.$$ उत्तर

(ii) यदि घटनाएँ स्वतन्त्र हों, तब

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

परन्तु $$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$\therefore$ $$P(A) \cdot P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\frac{1}{2} \times p = \frac{1}{2} + p - \frac{3}{5}$$

या $$\frac{1}{2} \times p - p = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$$

या $$-\frac{1}{2}p = -\frac{1}{10} \text{ या } p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$ उत्तर

प्रश्न 8. मान लें A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0.3$, और $P(B) = 0.4$, तब (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(A/B)$ (iv) $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए।

हल : A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गयीं हैं तथा

$$P(A) = 0.3 \text{ और } P(B) = 0.4$$

(i) $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$= 0.3 \times 0.4 = 0.12.$$ उत्तर

(ii) $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.3 + 0.4 - 0.12$$
$$= 0.7 - 0.12 = 0.58.$$ उत्तर

(iii) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = \frac{12}{40} = 0.3$$ उत्तर

(iv) $$\text{P(B/A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.3} = \frac{12}{30}$$
$$= 0.4.$$ उत्तर

प्रश्न 9. दी गई घटनाएँ A और B ऐसी हैं, जहाँ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$, तब $P(A$-नहीं और B-नहीं) ज्ञात कीजिए।

हल : घटना A-नहीं और B-नहीं का तात्पर्य है = $\bar{A} \cap \bar{B}$

दिया है : $$P(A) = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{1}{2} \text{ तथा } P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

अब $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - \text{P(A} \cup \text{B)} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. मान लें A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं और $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{7}{12}$ और $P(A$- नहीं और B-नहीं) $= \frac{1}{4}$, क्या A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं ?

हल : दिया है, $$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{7}{12}$$

$\Rightarrow$ $$P(A\text{- नहीं और } B\text{-नहीं}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}$$

अर्थात् $$\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{7}{12} + P(A \cap B)$$

या $$P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12}$$
$$= \frac{3-6+7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

और $$P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{24}$$

अतः A और B स्वतंत्र नहीं हैं। उत्तर

प्रश्न 11. A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$, तो

(i) $P(A$ और $B)$ (ii) $P(A$ और B-नहीं$)$

(ii) $P(A$ या $B)$ (iv) $P(A$ और B में से कोई भी नहीं$)$

का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6$

A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं

(i) $\therefore$ $P(A \text{ और } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
$= 0.3 \times 0.6 = 0.18$

$\therefore$ $P(A \text{ और } B) = 0.18.$ उत्तर

(ii) $P(A \text{ और } B \text{ नहीं}) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
$= 0.3 - 0.18 = 0.12.$ उत्तर

(iii) $P(A \text{ या } B) = P(A \cup B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0.3 + 0.6 - 0.18$
$= 0.9 - 0.18 = 0.72.$ उत्तर

(iv) $P(A \text{ और } B \text{ में कोई नहीं}) = P(A' \cap B') = P(A' \cup B')$
$= 1 - P(A \cup B)$
$= 1 - 0.72 = 0.28.$ उत्तर

प्रश्न 12. एक पासे को तीन बार उछाला जाता है तो कम-से-कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : पासे की उछाल में प्राप्त सम संख्याएँ = 2, 4, 6

एक पासे के उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ सम संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ एक सम संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

तीनों पासों पर सम संख्या आने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

तीनों पासों को उछालने पर कम-से-कम एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= 1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$ उत्तर

प्रश्न 13. दो गेंदें एक बॉक्स से बिना प्रतिस्थापित किए निकाली जाती हैं। बॉक्स में 10 काली और 8 लाल गेंदें हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(i) दोनों गेंदे लाल हों

(ii) प्रथम काली एवं दूसरी लाल हो

(iii) एक काली तथा दूसरी लाल हो।

हल : (i) कुल गेंदों की संख्या = 8 + 10 = 18

मान लीजिए लाल तथा काली गेदों को क्रमशः R तथा B से व्यक्त करें, तब पहली तथा दूसरी उछाल में दोनों लाल गेंदें प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$. **उत्तर**

(ii) पहली उछाल में काली गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता $P(B) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

दूसरी उछाल में लाल गेंद प्राप्त होने की प्रायिकता $P(R) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

(∵ गेंद मिला दी जाती है।)

$$\therefore \quad P(BR) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}.$$ **उत्तर**

(iii) P(एक काली तथा एक लाल) $= P(BR$ या $RB)$

$$= P(BR) + P(RB)$$

$$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$$

$$= \frac{20+20}{81} = \frac{40}{81}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 14. एक विशेष समस्या को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं। यदि दोनों स्वतंत्र रूप से, समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) समस्या हल हो जाती है

(ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

हल : A और B द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ और न हल करने की प्रायिकता क्रमशः $1-\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{2}$ और $1-\frac{1}{3}$ या $\frac{2}{3}$ हैं।

(i) समस्या हल न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

∴ दोनों की समस्या हल होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. **उत्तर**

(ii) यदि समस्या के हल होने को S और न हल होने को F निरूपित करें तो तथ्यतः उस समस्या को हल $SF + FS$ ढंग से हल किया जाएगा।

$$\text{इसकी प्रायिकता} = \frac{1}{2} \times \left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 15. ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। निम्नलिखित में से किन दशाओं में घटनाएँ E और F स्वतंत्र हैं ?

(i) E : निकाला गया पत्ता हुकुम का है

F : निकाला गया पत्ता इक्का है

(ii) E : निकाला गया पत्ता काले रंग का है

F : निकाला गया पत्ता एक बादशाह है

(iii) E : निकाला गया पत्ता एक बादशाह या एक बेगम है

F : निकाला गया पत्ता एक बेगम या एक गुलाम है

हल : ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52 पत्ते हैं।

उस गड्डी में 13 पत्ते हुकुम के हैं

$\therefore$ $P(E) = P($एक पत्ता हुकुम का निकाला गया$)$

$$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$\because$ ताश की गड्डी में 4 इक्के हैं।

$\therefore$ $P(F) = P$ (निकाला गया पत्ता इक्का है)

$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ताश की गड्डी में हुकुम का इक्का एक होता है।

$\therefore$ $P(E \cap F) = P($हुकुम का इक्का निकाला गया$) = \dfrac{1}{52}$

$$P(E) \times P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = P(E \cap F)$$

$\therefore$ $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$

अत: E और F स्वतंत्र हैं।

(ii) ताश की गड्डी में काले रंग के पत्ते = 26

$\therefore$ $P(E) = P($काले रंग का पत्ता निकालना$) = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$

ताश की गड्डी में कुल बादशाह = 4

$\therefore$ $P(F) = P($निकाला गया पत्ता एक बादशाह है$) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

काले रंग के बादशाहों की संख्या = 2

$\therefore$ $P(E \cap F) = P($काले रंग का बादशाह निकालना$) = \dfrac{2}{52} = \dfrac{1}{26}$

$$P(E) \times P(F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{26} = P(E \cap F)$$

$\therefore$ $P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$

अत: E और F स्वतंत्र हैं।

(iii) ताश की गड्डी में बादशाह व बेगम की संख्या = 8

$\therefore$ $P(E) = P($बादशाह या बेगम का पत्ता निकालना$)$

$$= \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

बेगम व गुलाम के पत्तों की संख्या = 8

$\therefore P(F) = P($बेगम या गुलाम का पत्ता निकालना$) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

घटना E और F में 4 पत्ते बेगम के उभयनिष्ठ हैं।

$$\therefore \quad P(E \cap F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

अब $$P(E) \times P(F) = \frac{2}{13} \times \frac{2}{13} = \frac{4}{169}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{13}$$

$$\therefore \quad P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F)$$

अत: E और F स्वतंत्र नहीं हैं।

प्रश्न 16. एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिन्दी का, 40% अंग्रेजी का और 20% दोनों अखबार पढ़ते हैं। एक छात्रा को यादृच्छया चुना जाता है।

(a) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।

(b) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(c) यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तो उसके हिन्दी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए H हिन्दी और E अंग्रेजी के अखबार पढ़ने को व्यक्त करने वाली घटनाएँ हैं।

प्रश्नानुसार $$P(H) = 60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$P(E) = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$P(H \cap E) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$

(a) $$P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E)$$
$$= 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$$

$$1 - P(H \cap E) = 1 - 0.8 = 0.2 = \frac{1}{5}.$$ उत्तर

इससे स्पष्ट होता है कि $\frac{1}{5}$ अर्थात् 20% विद्यार्थी अखबार नहीं पढ़ते।

(b) P(यदि अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तथा हिन्दी का अखबार भी पढ़ती है)

$$= P(E/H)$$

$$= \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

(c) P(यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तथा अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ती है)

$$= P(H/E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}$$

$$= \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}.$$ उत्तर

प्रश्न 17. यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता निम्नलिखित में से क्या है—

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

हल : $\because$ सम अभाज्य संख्या = 2

$\therefore$ सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$

अर्थात् दोनों पासों को उछालने पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की

$$\text{प्रायिकता} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

अत: विकल्प (D) सही है। उत्तर

प्रश्न 18. दो घटनाओं *A* और *B* को परस्पर स्वतंत्र कहते हैं यदि

(A) A और B परस्पर अपवर्जी हैं

(B) $P(A' \cap B') = [1 - P(A)]\,[1 - P(B)]$

(C) $P(A) = P(B)$

(D) $P(A) + P(B) = 1$

हल : जब दोनों घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं, तब

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

या

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = [1 - P(A)]\,[1 - P(B)]$$

अत: विकल्प (B) सही है। उत्तर

प्रश्नावली 13·3

प्रश्न 1. एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुन: कलश में रख दी जाती है। पुन: निकाले गए रंग की 2 अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती हैं तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंद की लाल होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : $\therefore$ लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{...(i)}$$

इसके पश्चात् दो लाल रंग की गेंद रख दी गईं। अब कलश में 7 लाल और 5 काली गेंदें हैं। दूसरी बार में एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{7}{12} \quad \text{...(ii)}$$

पुन: माना कि पहली बार में एक काली गेंद निकाली जाती है और फिर उसे कलश में रख दिया जाता है। लाल रंग की गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{...(iii)}$$

इसके पश्चात् कलश में 2 काली गेंदें रख दी जाती हैं। अब कलश में 5 लाल और 7 काली गेंदें हैं।

दूसरी बार में एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{12} \qquad \text{...(iv)}$$

कलश में दूसरी लाल गेंद निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2}\times\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}$$

$$= \frac{7+5}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

उत्तर

प्रश्न 2. एक थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदें हैं और एक अन्य थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं। दोनों थैलों में से एक को यादृच्छया चुना जाता है और उसमें एक गेंद निकाली जाती है जो कि लाल है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि गेंद पहले थैले से निकाली गई है ?

हल : मान लीजिए पहले थैले के चुनने की घटना को E_1 से और दूसरे थैले को चुनने की घटना को E_2 से व्यक्त करते हैं, तथा लाल गेंद निकालने की घटना को E से दर्शाते हैं।

एक थैले को चुनने की प्रायिकता,

$$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

पहले थैले में 4 लाल और 4 काली गेंदे हैं।

$\therefore$ लाल गेंद चुनने की प्रायिकता $= \frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$$P(E/E_1) = \frac{1}{2}$$

दूसरे थैले में 2 लाल और 6 काली गेंदें हैं।

$\therefore$ एक लाल गेंद चुनने की प्रायिकता $= \frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

अर्थात् $P(E/E_2) = \frac{1}{4}$

पहले थैले से लाल गेंद निकाले जाने की प्रायिकता $= P(E_1E)$

अब बेज प्रमेय से $P(E_1) = \dfrac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1)+P(E_2)P(E/E_2)}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{8}{3}=\frac{2}{3}.$$

उत्तर

प्रश्न 3. यह ज्ञात है कि एक महाविद्यालय के छात्रों से, 60% छात्रावास में रहते हैं और 40% छात्रावास में नहीं रहते हैं। पूर्ववर्ती वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि छात्रावास में रहने वाले छात्रों में से 30% और छात्रावास में न रहने वाले छात्रों में से 20% छात्रों ने A-ग्रेड लिया। वर्ष के अन्त में महाविद्यालय के एक छात्र को यादृच्छया चुना गया और यह पाया गया कि उसे A-ग्रेड मिला है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह छात्र छात्रावास में रहने वाला है ?

हल : मान लीजिए E_1 : छात्रावास में रहने वाले छात्र

E_2 : छात्रावास में नहीं रहने वाले छात्र

$P(E_1) = 60\% = 0.6, P(E_2) = 40\% = 0.4$

A/E_1 = वह विद्यार्थी जो A-ग्रेड पाता है और छात्रावास में रहता है।

A/E_2 = वह विद्यार्थी जो A-ग्रेड पाता है और छात्रावास में नहीं रहता है।

$$P(A/E_1) = 30\% = 0.3, P(A/E_2) = 20\% = 0.2$$

$P(E_1/A) = P(A$-ग्रेड पाने वाला विद्यार्थी छात्रावास में रहता है।

अब बेज प्रमेय से
$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$
$$= \frac{0.6\times0.3}{0.6\times0.3+0.4\times0.2}$$
$$= \frac{0.18}{0.18+0.08}=\frac{0.18}{0.26}=\frac{9}{13}.$$
उत्तर

प्रश्न 4. एक बहुविकल्पीय प्रश्न का उत्तर देने में एक विद्यार्थी या तो प्रश्न का उत्तर जानता है या वह अनुमान लगाता है। मान लें कि उसके उत्तर जानने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है और अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। मान लें कि छात्र के प्रश्न के उत्तर का अनुमान लगाने पर सही उत्तर देने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है तो इस बात की क्या प्रायिकता है कि कोई छात्र प्रश्न का उत्तर जानता है यदि यह ज्ञात है कि उसने सही उत्तर दिया ?

हल : मान लीजिए उत्तर जानने तथा अनुमान लगाने की घटनाएँ क्रमशः E_1 तथा E_2 हैं, तब
$$P(E_1) = \frac{3}{4}, P(E_2) = \frac{1}{4}$$
$$P(A/E_1) = 1, P(A/E_2) = \frac{1}{4}$$

यहाँ $P\left(\frac{A}{E_1}\right)$ विद्यार्थी के उत्तर जानने की प्रायिकता है।

घटना E_1/A = विद्यार्थी जानता है कि उत्तर सही है।

अब बेज प्रमेय से
$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(E_1/A)}{P(E_1)P(A/E_1)+P(E_2)P(A/E_2)}$$
$$= \frac{\frac{3}{4}\times1}{\frac{3}{4}\times1+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{16}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{13}{16}}$$
$$= \frac{3}{4}\times\frac{16}{13}=\frac{12}{13}.$$
उत्तर

प्रश्न 5. किसी विशेष रोग के सही निदान के लिए रक्त की जाँच 99% असरदार है, जब वास्तव में रोगी उस रोग से ग्रस्त होता है। किन्तु 0.5% बार किसी स्वस्थ व्यक्ति की रक्त जाँच करने पर निदान गलत रिपोर्ट देता है यानी व्यक्ति को रोग से ग्रस्त बतलाता है। यदि किसी जनसमुदाय में 0.1% लोग उस रोग से ग्रस्त हैं तो क्या प्रायिकता है कि कोई यादृच्छया चुना गया व्यक्ति उस रोग से ग्रस्त होगा यदि उसके रक्त की जाँच में यह बताया जाता है कि उसे यह रोग है ?

हल : मान लीजिए रोगी तथा निरोगी व्यक्तियों की घटनाएँ क्रमशः E_1 तथा E_2 हों और घटना A रक्त की जाँच की रिपोर्ट पोजीटिव हो, तब

$$P(E_1) = P(\text{व्यक्ति रोगी है}) = 0.1\% = 0.001$$
$$P(E_2) = P(\text{व्यक्ति रोगी नहीं है}) = 1 - 0.001$$
$$= 0.999\%$$

$\therefore$ $$P(A/E_1) = 99\% = 0.99$$

$P(A/E_2) = P(\text{रक्त की जाँच की गई है पर रोगी नहीं है}) = 0.5\% = 0.005$

$P(\text{व्यक्ति रोगी है और असरदार रक्त जाँच हुई है})$

अब बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$
$$= \frac{0.001 \times 0.99}{0.001 \times 0.99 + 0.999 \times 0.005}$$
$$= \frac{9.9}{9.9 + 49.95} = \frac{9.9}{59.85}$$
$$= \frac{990}{5985} = \frac{198}{1197}.$$

उत्तर

प्रश्न 6. तीन सिक्के दिए गए हैं। एक सिक्के के दोनों ओर चित ही है। दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है और तीसरा सिक्का अनभिनत है। तीनों में से एक सिक्के को यादृच्छया चुना गया और उसे उछाला गया है। यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों चित वाला सिक्का है ?

हल : माना पहला, दूसरा तथा तीसरा सिक्के के चुनने की घटनाएँ क्रमशः E_1, E_2 तथा E_3 हों और घटना A, सिक्का उछालने पर चित का प्राप्त होना हो, तब

तीन सिक्कों में से एक सिक्का चुनने की प्रायिकता,

अर्थात् $$P(E_1) = \frac{1}{3},\ P(E_2) = \frac{1}{3},\ P(E_3) = \frac{1}{3}$$

पहले सिक्के के दोनों ओर चित है $= P(A/E_1) = 1$

दूसरा सिक्का इस प्रकार अनभिनत है कि

$$P(A/E_2) = 75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

तीसरा सिक्का अनभिनत है जिसकी प्रायिकता, $P(A/E_3) = \frac{1}{3}$

$P(\text{सिक्के पर चित हो और पहला सिक्का हो})$ तो

बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{4+3+2} = \frac{4}{9}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. एक बीमा कम्पनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 हैं। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : मान लीजिए घटनाएँ E_1, E_2, E_3 तथा E क्रमशः स्कूटर चालक का बीमा होना, कार चालक का बीमा होना, ट्रक चालक का बीमा होना, और दुर्घटनाग्रस्त होना हों, तब

कुल बीमाकृत चालकों की संख्या = 2000 + 4000 + 6000
= 12000

$$P(E_1) = \frac{2000}{12000} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_2) = \frac{4000}{12000} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_3) = \frac{6000}{12000} = \frac{1}{2}$$

P(स्कूटर चालक का दुर्घटनाग्रस्त होना) = $P(E/E_1) = 0.01$
P(कार चालक का दुर्घटनाग्रस्त होना) = $P(E/E_2) = 0.03$
P(ट्रक चालक का दुर्घटनाग्रस्त होना) = $P(E/E_3) = 0.15$
P(दुर्घटनाग्रस्त स्कूटर चालक है) तो

$$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1)+P(E_2)P(E/E_2)+P(E_3)P(E/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}\times 0.01}{\frac{1}{6}\times 0.01+\frac{1}{3}\times 0.03+\frac{1}{2}\times 0.15}$$

$$= \frac{1}{1+6+45} = \frac{1}{52}.$$ उत्तर

प्रश्न 8. एक कारखाने में A और B दो मशीनें लगी हैं। पूर्व विवरण से पता चलता है कि कुल उत्पादन का 60% मशीन A और 40% मशीन B द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त मशीन A का 2% और मशीन B का 1% उत्पादन खराब है। यदि कुल उत्पादन का एक ढेर बना लिया जाता है और उस ढेर से यादृच्छया निकाली गई वस्तु खराब हो, तो इस वस्तु के 'मशीन A' द्वारा बने होने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : मान लीजिए मशीन A और B के उत्पादन की घटनाएँ क्रमशः E_1 तथा E_2 और खराब उत्पादन की घटना E से व्यक्त करें, तब

$$P(E_1) = 60\% = 0.6$$

$P(E_2) = P$(मशीन B का प्रतिशत उत्पादन)
$= 40\% = 0.4$

$$P(E/E_1) = P(\text{मशीन } A \text{ का उत्पादन खराब है})$$
$$= 0.02$$
$$P(E/E_2) = \text{P}(\text{मशीन } B \text{ का उत्पादन खराब है})$$
$$= 0.01$$

हमें प्रायिकता ज्ञात करनी है कि ख़राब उत्पादन मशीन A का है।

अतः बेज प्रमेय से
$$P(E_2/E) = \frac{P(E_2)P(E/E_2)}{P(E_1)\times P(E/E_1)+P(E_2)\times P(E/E_2)}$$
$$= \frac{0.4\times 0.01}{0.6\times 0.02+0.4\times 0.01}$$
$$= \frac{0.004}{0.016} = \frac{1}{4}.$$ उत्तर

प्रश्न 9. दो दल एक निगम के निदेशक मण्डल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में हैं। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.6 तथा 0.4 हैं। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नए उत्पाद के प्रारम्भ होने की प्रायिकता 0.7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0.3 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पादन दूसरे दल द्वारा प्रारम्भ किया गया था।

हल : मान लीजिए E_1 = पहले दल के जीतने की घटना

E_2 = दूसरे दल के जीतने की घटना

E = एक नए उत्पाद का प्रारम्भ होना

E/E_1 = पहला दल नया उत्पाद प्रारम्भ करेगा।

E/E_2 = दूसरा दल नया उत्पाद प्रारम्भ करेगा, तब

$P(E_1) = 0.6,$ $\quad P(E_2) = 0.4$

$P(E/E_1) = 0.7$ $\quad P(E/E_2) = 0.3$

अब बेज प्रमेय से,
$$P(E_2/E) = \text{P}(\text{नया उत्पाद दूसरे दल ने प्रारम्भ किया})$$
$$= \frac{P(E_2)P(E/E_2)}{P(E_2)P(E/E_2)+P(E_1)P(E/E_1)}$$
$$= \frac{0.4\times 0.3}{0.4\times 0.3+0.6\times 0.7}$$
$$= \frac{12}{12+42} = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. मान लीजिए कि कोई लड़की एक पासा उछालती है। यदि उसे 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और 'चितों' की संख्या नोट करती है। यदि उसे 1, 2, 3, या 4 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उस पर 'चित' या 'पट' प्राप्त हुआ। यदि उसे ठीक एक चित प्राप्त होता है तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : एक पासे को उछालने से 6(1, 2, 3, 4, 5, 6) परिणाम प्राप्त होते हैं।

मान लीजिए घटना E_1 : 5 या 6 का प्राप्त होना

तथा घटना E_2 : 1, 2, 3, 4 का प्राप्त होना

E : सिक्का/सिक्के उछालने पर चित प्राप्त होना

$P(E_1)$: P(पासा उछालने पर 5, 6 का प्राप्त होना) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(E_2)$: P(पासा उछालने पर 1, 2, 3, 4 का प्राप्त होना) $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

जब सिक्का तीन बार उछाला जाए तो कुल परिणाम {TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH} = 8 हैं।

एक चित प्राप्त होने के तरीके HTT, THT, TTH अर्थात् 3 तरीके

अर्थात् $P(E/E_1) = P$(पासा फेंकने पर 5, 6 प्राप्त होने तथा तीन सिक्के उछलने पर 1 चित का प्राप्त होना) $= \frac{3}{8}$

जब एक सिक्का फेंका जाए तो चित आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

अर्थात् $P(A/E_1) = P$(पासा फेंकने पर 1, 2, 3, 4 आना तथा 1 सिक्के के फेंकने से चित आना)

$$= \frac{1}{2}$$

अत: बेज प्रमेय से,

$$P(E_2/E) = \frac{P(E_2)P(E/E_2)}{P(E_2)P(E/E_2) + P(E_1)P(E/E_1)}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{24}} = \frac{1}{3}\times\frac{24}{11} = \frac{8}{11}.$$ उत्तर

प्रश्न 11. एक व्यावसायिक निर्माता के पास *A, B* तथा *C* मशीन ऑपरेटर हैं। प्रथम ऑपरेटर A, 1% खराब सामग्री उत्पादित करता है तथा ऑपरेटर *B* और *C* क्रमश: 5% और 7% खराब सामग्री उत्पादित करता है। कार्य पर *A* कुल समय का 50% लगाता है, *B* कुल समय का 30% तथा *C* कुल समय का 20% लगाता है। यदि एक खराब सामग्री उत्पादित है तो इसे A द्वारा उत्पादित किए जाने की प्रायिकता क्या है ?

हल : मान लीजिए तीन मशीनों द्वारा समय के अनुसार घटनाएँ E_1, E_2, E_3 घटती हों, तब

$P(E_1) = P$(पहले ऑपरेटर द्वारा कुल समय का उपयोग) = 50% = 0.5

$P(E_2) = P$(दूसरे ऑपरेटर द्वारा कुल समय का उपयोग) = 30% = 0.3

$P(E_3) = P$(तीसरे ऑपरेटर द्वारा कुल समय का उपयोग) = 20% = 0.2

यहाँ माना घटना E खराब उत्पाद के होने की हो, तब

$$P(E/E_1) = 0.01,\ P(E/E_2) = 0.05,\ P(E/E_3) = 0.07$$

P(खराब उत्पाद पहले ऑपरेटर द्वारा बना है) $= P\left(\frac{E_1}{E}\right)$

अत: बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2) + P(E_3)P(E/E_3)}$$

$$= \frac{0.5 \times 0.01}{0.5 \times 0.01 + 0.3 + 0.05 \times 0.2 \times 0.07}$$

$$= \frac{5}{5+15+14} = \frac{5}{34}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 12. 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं, जो ईंट के पत्ते हैं। खो गए पत्ते की ईंट होने की प्रायिकता क्या है ?

हल : मान लीजिए घटना E_1 = खोया हुआ पत्ता ईंट का पत्ता है।

ताश की गड्डी में कुल पत्तों की संख्या = 52

ईंट के पत्तों की संख्या = 13

$$\therefore \qquad P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

घटना E_2 = खोया हुआ पत्ता ईंट का नहीं है।

ईंट के अतिरिक्त दूसरे पत्तों की संख्या = 39

$$\therefore \qquad P(E_2) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$

(i) जब ईंट का पत्ता खो गया हो तब 51 पत्तों में से 12 पत्ते ईंट के रह जायेंगे।

$$\therefore \qquad P(A/E_1) = \frac{^{12}C_2}{^{51}C_2} = \frac{12 \times 11}{51 \times 50} = \frac{22}{425}$$

(ii) जब ईंट का पत्ता न खोया गया हो तो 51 पत्तों में से 13 पत्ते ईंट के हैं।

$$\therefore \qquad P(A/E_2) = \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2} = \frac{13 \times 12}{51 \times 50} = \frac{26}{425}$$

अत: बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{22}{425}}{\frac{1}{4} \times \frac{22}{125} + \frac{3}{4} \times \frac{26}{425}}$$

$$= \frac{22}{22+78} = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 13. A द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। एक सिक्का उछाला जाता है तथा A बताता है कि चित प्रदर्शित हुआ। वास्तविक रूप में चित प्रकट होने की प्रायिकता है—

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

हल : माना A के सत्य बोलने तथा सत्य न बोलने की घटनाएँ E_1 तथा E_2 हों, तब

$$P(E_1) = \frac{4}{5}, P(E_2) = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

जब E चित होने की घटना दर्शाता हो, तब

$$P\left(\frac{E}{E_1}\right) = \frac{1}{2} \text{ और } P\left(\frac{E}{E_2}\right) = \frac{1}{2}$$

अत: चित आने की अभीष्ट प्रायिकता,

$$P\left(\frac{E_1}{E}\right) = \frac{P(E_1).P\left(\frac{E}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{E}{E_1}\right) + P(E_2).P\left(\frac{E}{E_2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}$$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 14. यदि A और B ऐसी घटनाएँ हैं कि $A \subset B$ तथा $P(B) \neq 0$, तो निम्न में से कौन ठीक है ?

(A) $P(A/B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ **(B) $P(A/B) < P(A)$**

(C) $P(A/B) \geq P(A)$ **(D) इनमें से कोई नहीं।**

हल : $\because$ $A \subset B$ अर्थात् $A \cap B = A$

या $P(A \cap B) = P(A)$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

परन्तु $P(B) \leq 1$

अर्थात् $P\left(\frac{A}{B}\right) \geq P(A)$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

प्रश्नावली 13·4

प्रश्न 1. बताइए कि निम्नलिखित प्रायिकता बंटनों में कौन से एक यादृच्छिक चर के लिए सम्भव नहीं है। अपना उत्तर कारण सहित लिखिए—

(i)

X	0	1	2
$P(X)$	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0.1	0.5	0.2	–0.1	0.3

(iii)

Y	–1	0	1
$P(Y)$	0.6	0.1	0.2

(iv)

Z	3	2	1	0	−1
$P(Z)$	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

हल : (i) प्रायिकताओं का योगफल = 0.4 + 0.4 + 0.2 = 1.0

दिया गया बंटन प्रायिकता बंटन है।

(ii) यहाँ पर $P(3) = -0.1$, प्रायिकता कभी भी ऋण नहीं हो सकती इसी कारण प्रायिकता बंटन नहीं है।

(iii) प्रायिकताओं का योग = 0.6 + 0.1 + 0.2 = 0.9

प्रायिकताओं का योगफल एक होना चाहिए।

यह बंटन प्रायिकता बंटन नहीं है।

(iv) प्रायिकताओं का योग = 0.3 + 0.2 + 0.4 + 0.1 + 0.05 = 1.05 > 1

प्रायिकताओं का योगफल 1 से अधिक नहीं हो सकता।

अर्थात् यह बंटन प्रायिकता बंटन नहीं है।

प्रश्न 2. एक कलश में 5 लाल और 2 काली गेंदें हैं। दो गेंदें यादृच्छया निकाली गईं। मान लीजिए X काली गेंदों की संख्या को व्यक्त करता है। X के सम्भावित मान क्या हैं ? क्या X यादृच्छिक चर है ?

हल : काली गेंदों की संख्या 2 है।

X के मान 0, 1 और 2 हो सकते हैं।

इनके संगत प्रायिकता P(x) ज्ञात की जा सकती है।

अत: X एक यादृच्छिक चर है। उत्तर

प्रश्न 3. मान लीजिए X चितों की संख्या और पटों की संख्या में अन्तर को व्यक्त करता है, जब एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है। X के सम्भावित मूल्य क्या हैं ?

हल : जब एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है तो सिक्कों पर चितों और पटों की संख्याएँ इस प्रकार हैं—

चितों की संख्या	:	6	5	4	3
पटों की संख्या	:	0	1	2	3
X चितों और पटों की संख्या का अन्तर	:	6	4	2	0

अत: X के सम्भावित मूल्य 6, 4, 2 और 0 हैं। उत्तर

प्रश्न 4. निम्नलिखित के प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए—

(i) एक सिक्के की दो उछालों में चितों की संख्या का

(ii) तीन सिक्कों को एक साथ एक बार उछालने पर पटों की संख्या का

(iii) एक सिक्के की चार उछालों में चितों की संख्या का।

हल : (i) एक सिक्के की दो उछालों में प्राप्त प्रतिदर्श समष्टि S = {HH, HT, TH, TT} है।

यहाँ पर चितों की संख्या 0, 1, 2 हो सकती है।

$$P(0) = \frac{1}{4},\ P(1) = \frac{1}{2},$$
$$P(2) = \frac{1}{4}$$

अत: प्रायिकता बंटन होगा—

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

उत्तर

(ii) तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THT, TTH, TTT}

पटों की संख्या 0, 1, 2, 3 हो सकती है।

$$\therefore \quad P(0) = \frac{1}{8},\ P(1) = {}^3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = {}^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = \frac{1}{8}$$

अत: प्रायिकता बंटन होगा—

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

उत्तर

(iii) एक सिक्के को चार बार उछालने पर चितों की संख्या 0, 1, 2, 3, 4 हो सकती है।
अत: प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या = $2^4 = 16$

$$P(0) = {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16},$$

$$P(1) = {}^4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(2) = {}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},$$

$$P(3) = {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(4) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

अत: प्रायिकता बंटन होगा—

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

उत्तर

प्रश्न 5. एक पासा दो बार उछालने पर सफलता की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए जहाँ
(i) '4 से बड़ी संख्या' को एक सफलता माना गया है।
(ii) 'पासे पर संख्या 6 प्रकट होना' को एक सफलता माना गया है।

हल : जब दो पासे फेंके जाते हैं तो $n(S) = 6 \times 6 = 36$

एक पासे पर 4 से बड़ी संख्याएँ = 5, 6

$\therefore$ सफलता की प्रायिकता अर्थात् पासे पर 4 से अधिक संख्या आने की प्रायिकता

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

P(असफलता) = पासे पर 4 से बड़ी संख्या न आने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

अब $P(0) = P$(पासे पर दोनों बार 5, 6 नहीं आता) $= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$$P(1) = 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$P(2)$ = P(दोनों पासों पर 5 या 6 आना)

$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

∴ प्रायिकता बंटन इस प्रकार होगा—

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

उत्तर

(ii) मान लीजिए A : 'न्यूनतम 1 पासे पर संख्या 6 आना'

⇒ A = {(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}

एक पासे पर 6 प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

एक पासे पर 6 न आने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

दो पासों पर 6 न आने की प्रायिकता $= \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

दो पासों पर कम-से-कम एक 6 आने की प्रायिकता $= 1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

∴ कम-से-कम 6 आने का प्रायिकता बंटन होगा—

X	0	1
$P(X)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$

उत्तर

प्रश्न 6. 30 बल्बों के एक ढेर से, जिसमें 6 बल्ब खराब हैं, 4 बल्बों का एक नमूना (प्रतिदर्श) यादृच्छया बिना प्रतिस्थापन के निकाला जाता है। खराब बल्बों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : कुल बल्बों की संख्या = 30

खराब बल्बों की संख्या = 6

∴ सही बल्ब = 30 – 6 = 24

एक खराब बल्ब के चुनने की प्रायिकता $= \frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

एक अच्छे बल्ब के चुनने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

यदि X खराब बल्बों की संख्या को व्यक्त करता हो तो $X = 0, 1, 2, 3, 4$

$$P(X=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{256}{625}$$

$$P(X=1) = {}^4C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right) = 4\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{256}{625}$$

$$P(X=2) = {}^4C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4.3}{2.1}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{96}{625}$$

$$P(X=3) = {}^4C_3 \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{4.3.2}{3.2.1}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{16}{625}$$

$$P(X=4) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 1\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{625}$$

अत: खराब बल्बों का प्रायिकता बंटन होगा—

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

उत्तर

प्रश्न 7. एक सिक्का समसर्वय सन्तुलित नहीं है, जिसमें चित प्रकट होने की सम्भावना पट प्रकट होने की सम्भावना की तीन गुनी है। यदि सिक्का दो बार उछाला जाता है तो पटों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : माना यदि पट x बार आता है तो चित $3x$ बार आएगा।

$$\therefore \quad P(H) = \frac{3x}{x+3x} = \frac{3}{4} \text{ तथा } P(T) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=0) = P(\text{कोई पट नहीं})$$

$$= P(\mathrm{HH}) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$P(X=1) = 2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

अत: पटों की संख्या का प्रायिकता बंटन होगा—

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

उत्तर

प्रश्न 8. एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है—

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

ज्ञात कीजिए–

(i) k **(ii)** $P(X < 3)$ **(iii)** $P(X > 6)$ **(iv)** $P(0 < X < 3)$

हल : (i) प्रायिकताओं का योगफल, $\Sigma P(X) = 1$

या $0 + k + 2k + 2k + 3k + k^2 + 2k^2 + 7k^2 + k = 1$

या $$10k^2 + 9k = 1 \text{ या } 10k^2 + 9k - 1 = 0$$

या $$(k + 1)(10k - 1) = 0, k = \frac{1}{10} \text{ या } k \neq -1$$ **उत्तर**

(ii) अब प्रायिकता बंटन होगा–

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\left(\frac{7}{100}+\frac{1}{10}\right)$

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$$
$$= 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}.$$ **उत्तर**

(iii) $$P(X > 6) = P(7) = \frac{7}{100} + \frac{1}{10} = \frac{17}{100}$$ **उत्तर**

(iv) $$P(0 < X < 3) = P(1) + P(2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 9. एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता फलन $P(x)$ निम्न प्रकार से है, जहाँ x कोई संख्या है–

$$P(x) = \begin{cases} k & \text{यदि } x = 0 \\ 2k & \text{यदि } x = 1 \\ 3k & \text{यदि } x = 2 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(a) k का मान ज्ञात कीजिए।

(b) $P(X < 2)$, $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 2)$ ज्ञात कीजिए।

हल : (a) $\because$ प्रायिकताओं का योगफल $= \Sigma P(X) = 1$

$\therefore$ $$k + 2k + 3k + 0 = 1$$

या $$6k = 1 \text{ या } k = \frac{1}{6}.$$ **उत्तर**

(b) $$P(X < 2) = P(0) + P(1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$ **उत्तर**

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$ **उत्तर**

तथा $$P(X \geq 2) = P(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 10. एक न्याय्य सिक्के की तीन उछालों पर प्राप्त चितों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : एक न्याय्य सिक्के को तीन बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{TTT, THT, TTH, HTT, HHT, HTH, THH, HHH\}$$

(i) $P(0)$ = कोई चित न आने की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(ii) $P(1)$ = P(एक चित का आना) $= \frac{3}{8}$

(iii) $P(2)$ = P(दो चित का प्राप्त होना) $= \frac{3}{8}$

(iv) $P(3)$ = P(तीन चित प्राप्त होना) $= \frac{1}{8}$

अत: प्रायिकता बंटन होगा—

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\text{माध्य} = \sum_{i=0}^{3} p_i x_i$$

$$= 0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$$

$$= 0+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{8}$$

$$= \frac{12}{8}=\frac{3}{2} = 1.5.$$

उत्तर

प्रश्न 11. दो पासों को युग्मत् उछाला गया। यदि X, छक्कों की संख्या को व्यक्त करता है, तो X की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए।

हल : एक पासा उछालने से प्रतिदर्श $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

एक पासे पर छक्का प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

पासे पर छक्का न प्राप्त होने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

जब दो पासे उछाले जाते हैं $n(S) = 36$

$P(0) = P$(कोई छक्का प्राप्त न होना) $= \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

$P(1) = P$(एक छक्का प्राप्त होना) $= 2\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{10}{36}$

$P(2) = P($दो छक्के प्राप्त होना$) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$$X \text{ की प्रत्याशा} = E(X) = \mu = \sum_{i=0}^{2} x_i p_i$$

$$= 0 \times \frac{25}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{1}{36} = \frac{10}{36} + \frac{2}{36}$$

$$= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 12. प्रथम छः धन पूर्णांकों में से दो संख्याएँ यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापन) चुनी गईं। मान लें X दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या को व्यक्त करता है। E(X) ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए प्रथम छः धन पूर्णांक = 1, 2, 3, 4, 5, 6 हैं।

इनमें एक अंक 6 तरीकों से चुना जा सकता है।

यदि इनमें से 1 संख्या ले लें, तब पाँच अंक शेष रह जाते हैं। अतः इनमें से एक अंक 5 तरीकों से चुना जा सकता है।

बिना प्रतिस्थापन के 1, 2, 3, 4, 5, 6 से दो अंक 5 × 6 = 30 तरीकों से चुन सकते हैं।

$$P(X = 2) = \{(1, 2), (2, 1)\} = \frac{2}{30}$$

$$P(X = 3) = \{3(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\} = \frac{4}{30}$$

$$P(X = 4) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)\} = \frac{6}{30}$$

$$P(X = 5) = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\} = \frac{8}{30}$$

$$P(X = 6) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\} = \frac{10}{30}$$

$$E(X) = \sum_{i=2}^{6} x_i p_i$$

$$= 2 \times \frac{2}{30} + 3 \times \frac{4}{30} + 4 \times \frac{6}{30} + 5 \times \frac{8}{30} + 6 \times \frac{10}{30}$$

$$= \frac{4 + 12 + 24 + 40 + 60}{30}$$

$$= \frac{140}{30} = \frac{14}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 13. मान लीजिए दो पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं के योग को X से व्यक्त किया गया है। X का प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : अब दो पासे उछाले जाते हैं, तब परिणामों की संख्या = 6 × 6 = 36

योग X	दशाएँ	विधियाँ	प्रायिकता (PX)
2	(1, 1)	1	$\frac{1}{36}$
3	(1, 2), (2, 1)	2	$\frac{2}{36}$
4	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	3	$\frac{3}{36}$
5	(1, 4) (2, 3), (3, 2), (4, 1)	4	$\frac{4}{36}$
6	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	5	$\frac{5}{36}$
7	(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	6	$\frac{6}{36}$
8	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	5	$\frac{5}{36}$
9	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	4	$\frac{4}{36}$
10	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	3	$\frac{3}{36}$
11	(5, 6), (6, 5)	2	$\frac{2}{36}$
12	(6, 6)	1	$\frac{1}{36}$

$$\therefore E(X^2) = \frac{1}{36} \times 2^2 + \frac{2}{36} \times 3^2 + \frac{3}{36} \times 4^2 + \frac{4}{36} \times 5^2 + \frac{5}{36} \times 6^2$$

$$+ \frac{6}{36} \times 7^2 + \frac{5}{36} \times 8^2 + \frac{4}{36} \times 9^2 + \frac{3}{36} \times 10^2 + \frac{2}{36} \times 11^2 + \frac{1}{36} \times 12^2$$

$$= \frac{4+18+48+100+180+294+320+324+300+242+144}{36}$$

$$E(X^2) = \frac{1974}{36} = \frac{329}{6}$$

$$X \text{ का प्रसरण} = \text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{329}{6} - (7)^2 = \frac{329}{6} - \frac{49}{1}$$

$$= \frac{329-249}{6} = \frac{35}{6} = 5.833$$ उत्तर

तथा मानक विचलन (S.D.) = $\sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{5.833}$

$= 2.414.$ **उत्तर**

प्रश्न 14. एक कक्षा में 15 छात्र हैं जिनकी आयु 14, 17, 15, 14, 21, 17, 19, 20, 16, 18, 20, 17, 16, 19 और 20 वर्ष हैं। एक छात्र को इस प्रकार चुना गया कि प्रत्येक छात्र के चुने जाने की सम्भावना समान है और चुने गए छात्र की आयु (X) को लिखा गया। यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। X का माध्य, प्रसरण व मानक विचलन भी ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ कक्षा में कुल छात्र = 15

प्रत्येक बच्चे के चुने जाने की प्रायिकता = $\frac{1}{15}$

दिए हुए बंटन का प्रायिकता बंटन है–

X	14	15	16	17	18	19	20	21
f	2	1	2	3	1	2	3	1
$P(X)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

X_i	$P(X_i)$	$X_iP(X_i)$	X_i^2	$X_i^2P(X_i)$
14	$\frac{2}{15}$	$\frac{28}{15}$	196	$\frac{392}{15}$
15	$\frac{1}{15}$	$\frac{15}{15}$	225	$\frac{225}{15}$
16	$\frac{2}{15}$	$\frac{32}{15}$	256	$\frac{512}{15}$
17	$\frac{3}{15}$	$\frac{51}{15}$	289	$\frac{867}{15}$
18	$\frac{1}{15}$	$\frac{18}{15}$	324	$\frac{324}{15}$
19	$\frac{2}{15}$	$\frac{38}{15}$	361	$\frac{722}{15}$
20	$\frac{3}{15}$	$\frac{60}{15}$	400	$\frac{1200}{15}$
21	$\frac{1}{15}$	$\frac{21}{15}$	441	$\frac{441}{15}$
येगफल		$\frac{263}{15}$		$\frac{4683}{15}$

माध्य $\mu = \sum x_i p_i = \frac{263}{15} = 17.533.$ **उत्तर**

प्रसारण = var $X = \sum E(X)^2 - \left|\sum E(X)\right|^2$

$$= \sum p_i x_i^2 - \left|\sum p_i x_i\right|^2$$

$$= \frac{4683}{15} - \left(\frac{263}{15}\right)^2$$

$$= 312.20 - (17.533)^2$$

$$= 312.20 - 307.418 = 4.782.$$ उत्तर

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\text{var}\, X} = \sqrt{4.782} = 2.19.$ उत्तर

प्रश्न 15. एक बैठक में 70% सदस्यों ने किसी प्रस्ताव का अनुमोदन किया और 30% सदस्यों ने विरोध किया। एक सदस्य को यादृच्छया चुना गया और यदि उस सदस्य ने प्रस्ताव का विरोध किया हो तो $X = 0$ लिया गया जब कि यदि उसने प्रस्ताव का अनुमोदन किया हो तो $X = 1$ लिया गया। $E(X)$ और var (X) ज्ञात कीजिए।

हल : $X = 0$, प्रायिकता $= 30\% = \frac{30}{100}$

$X = 1$, प्रायिकता $= 70\% = \frac{70}{100}$

X	0	1
$P(X)$	$\frac{30}{100}$	$\frac{70}{100}$

$$E(X) = 0 \times \frac{30}{100} + 1 \times \frac{70}{100}$$

$$= \frac{70}{100} = 0.7.$$ उत्तर

$$\text{Var}\,(X) = \text{E}(x^2) - (\text{E(X)})^2$$

$$= \left(0 + 1 \times \frac{70}{100}\right) - \left(\frac{7}{10}\right)^2$$

$$= \frac{70}{100} - \frac{49}{10} = \frac{21}{100} = 0.21.$$ उत्तर

निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर चुनें :

प्रश्न 16. ऐसे पासे जिसके तीन फलकों पर 1, अन्य तीन पर 2, और एक फलक पर 5 लिखा गया है, को उछालने पर प्राप्त संख्याओं का माध्य है—

(A) 1 (B) 2

(C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

हल : 3 फलकों पर 1 लिखा है

$\therefore$ 1 पाने की प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2 फलकों पर 2 लिखा है।

$\therefore$ 2 पाने की प्रायिकता $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

1 फलक पर 5 लिखा है।

$\therefore$ 5 पाने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

प्रायिकता बंटन है :

X	1	2	5
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\text{माध्य} = E(X) = \Sigma p_i x_i$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{6} \times 5$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3+4+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

अतः विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 17. मान लीजिए ताश की एक गड्डी से यादृच्छया दो पत्ते निकाले जाते हैं। मान लीजिए X इक्कों की संख्या प्रकट करता है। तब $E(X)$ का मान है—

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$

(C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

हल : जब दो पत्ते खींचे जाते हैं तब इक्का नहीं होता है।

$${}^{48}C_2 = \frac{48 \times 47}{2} = 24 \times 47 = 1128$$

52 पत्तों में से 2 पत्ते खींचे जाते हैं

$${}^{52}C_2 = \frac{52 \times 51}{2} = 26 \times 51 = 1326$$

$\therefore$ इक्का न होने की प्रायिकता $= \frac{1128}{1326}$

(ii) ${}^4C_1 \times {}^{48}C_1$ में 1 इक्का और 1 इक्का न खींचे जा सकते हैं

$$= 4 \times 48 = 192$$

$\therefore$ 1 इक्का और 1 इक्का न होने की प्रायिकता

$$= \frac{192}{1326}$$

(iii) दो इक्कों को निकालने की संख्या $= {}^4C_2 = 6$

$\therefore$ 2 इक्कों की संख्या आने की प्रायिकता $= \frac{6}{1326}$

$\therefore$ प्रायिकता बंटन है :

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1128}{1326}$	$\frac{192}{1326}$	$\frac{6}{1326}$

$$\therefore \qquad E(X) = \Sigma p_i x_i = \frac{1128}{1326} \times 0 + 1 \times \frac{192}{1326} + 2 \times \frac{6}{1326}$$

$$= \frac{192}{1326} + \frac{12}{1326} = \frac{204}{1326} = \frac{2}{13}$$

∴ विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

प्रश्नावली 13·5

प्रश्न 1. एक पासे को 6 बार उछाला जाता है। यदि 'पासे पर सम संख्या प्राप्त होना' एक सफलता है तो निम्नलिखित की प्रायिकताएँ क्या होंगी ?

(i) तथ्यत: 5 सफलताएँ(ii) न्यूनतम 5 सफलताएँ

(iii) अधिकतम 5 सफलताएँ?

हल : मान लीजिए प्रयोग में सफलता की प्रायिकता = p

एक पासे पर सम संख्याएँ 2, 4, 6, हैं।

प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता, अर्थात्

$$\text{सफलता की प्रायिकता } (p) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

और $$\text{असफलता की प्रायिकता } (q) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

एक पासे की 6 बार उछालने पर r सफलताओं की प्रायिकता

$$= {}^6C_r\, q^{6-r}\, p^r$$

(i) तथ्यत: 5 सफलताओं की प्रायिकता $p(x = 5)$

$$P(5) = {}^6C_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= \frac{6}{64} = \frac{3}{32}.$$ **उत्तर**

(ii) न्यूनतम 5 सफलताओं की प्रायिकता

$$= P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= {}^6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}^6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= 6 \times \frac{1}{64} + \left(\frac{1}{64}\right) = \frac{1}{64}(6 + 1)$$

$$= \frac{7}{64}.$$ **उत्तर**

(iii) अधिकतम 5 सफलताओं की प्रायिकता

$$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

$$= 1 - P(6) = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. पासों के एक जोड़े को 4 बार उछाला जाता है। यदि 'पासों पर प्राप्त अंकों का द्विक होना' एक सफलता मानी जाती है, तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

gy : $\because$ मान लीजिए सफलता की प्रायिकता $= p$

पासे के एक जोड़े को उछालने पर $n(S) = 36$

दो पासों को उछालने पर बनने वाले द्विक $= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$\therefore$ एक द्विक प्राप्त होने की प्रायिकता $(p) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

द्विक प्राप्त न होने की प्रायिकता $(q) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

पासे के जोड़े को 4 बार फेंका गया अर्थात् $n = 4$

r सफलताओं की प्रायिकता $= {}^4C_r\, q^{4-r}\, p^r$

2 सफलताओं की प्रायिकता $P(2) = {}^4C_2\, q^2\, p^2$

$$= 6 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}.$$ उत्तर

प्रश्न 3. वस्तुओं के एक ढेर में 5% त्रुटियुक्त वस्तुएँ हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि 10 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में एक से अधिक त्रुटियुक्त वस्तुएँ नहीं होंगी ?

हल : दिया है कि एक त्रुटियुक्त वस्तु को प्राप्त करने की प्रायिकता

$$(p) = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

एक अच्छी वस्तु जो त्रुटियुक्त न होने की प्रायिकता

$$(q) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

P(10 वस्तुओं के प्रतिदर्श में 1 से अधिक त्रुटियुक्त वस्तु न हो)

$$= P(0) + P(1)$$

$$= \left(\frac{19}{20}\right)^{10} + {}^{10}C_1 \left(\frac{19}{20}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)$$

$$= \left(\frac{19}{20}\right)^9 \left[\frac{19}{20} + \frac{10}{20}\right]$$

$$= \frac{29}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^9$$ उत्तर

प्रश्न 4. 52 ताश के पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से 5 पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) सभी 5 पत्ते हुकुम के हों ?

(ii) केवल 3 पत्ते हुकुम के हों ?

(iii) एक भी पत्ता हुकुम का नहीं हो ?

हल : चूँकि एक ताश की गड्डी में कुल 52 पत्ते होते हैं और उसमें 13 पत्ते हुकुम के हैं।

एक हुकुम का पत्ता निकालने की प्रायिकता $(p) = \dfrac{^{13}C_1}{^{52}C_1} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

हुकुम का पत्ता न निकालने की प्रायिकता $(q) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

(i) P(पाँचों पत्ते हुकुम के हों) $= {}^5C_5 \left(\dfrac{3}{4}\right)^0 \left(\dfrac{1}{4}\right)^5 = \dfrac{1}{4^5} = \dfrac{1}{1024}$. **उत्तर**

(ii) P(केवल तीन पत्ते हुकुम के हों) $= {}^5C_3\, q^2 p^3 = {}^5C_3 \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

$$= \frac{5\times4}{1\times2} \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{64}$$

$$= \frac{10\times9}{16\times64} = \frac{45}{512}.$$ **उत्तर**

(iii) P(कोई भी पत्ता हुकुम का नहीं हो) $= {}^5C_0 \left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{243}{1024}$. **उत्तर**

प्रश्न 5. किसी फैक्ट्री में बने एक बल्ब की 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज होने की प्रायिकता 0.05 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार के 5 बल्बों में से

(i) एक भी नहीं (ii) एक से अधिक नहीं (iii) एक से अधिक

(iv) कम-से-कम एक 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज हो जाएँगे।

हल : P(एक बल्ब 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज हो जाएगा।

$$= 0.05$$

q(एक बल्ब 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज नहीं होगा।)

$$= 1 - 0.05 = 0.95$$

(i) P(पाँचों में से कोई भी बल्ब 150 दिनों के उपयोग के बाद फ्यूज नहीं होगा)

$$P(X = 0) = {}^5C_0 (0.95)^5 (0.05)^0$$

$$= (0.95)^5.$$ **उत्तर**

(ii) P(एक से अधिक बल्ब फ्यूज नहीं होगा)

$$= P(0) + P(1) = (0.85)^5 + {}^5C_1\, (0.95)^4\, (0.05)$$

$$= (0.95)^4\, [0.95 + 5 \times 0.05]$$

$$= (0.95)^4\, (0.95 + 0.25)$$

$$= (0.95)^4\, (1.2).$$ **उत्तर**

(iii) P(एक से अधिक बल्ब फ्यूज होगा)

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1)$$

$$= 1 - 12\, (0.95)^4.$$ **उत्तर**

(iv) P(कम-से-कम एक बल्ब फ्यूज होता है)

$$= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$
$$= 1 - P(0)$$
$$= 1 - (0.95)^5.$$ **उत्तर**

प्रश्न 6. एक थैले में 10 गेंदें हैं जिनमें से प्रत्येक पर 0 से 9 तक के अंकों में से एक अंक लिखा है। यदि थैले से 4 गेंदें उत्तरोत्तर पुनः वापस रखते हुए निकाली जाती हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उनमें से किसी भी गेंद पर अंक 0 न लिखा हो।

हल : एक थैले में कुल गेदों की संख्या 10 हैं जिन पर 0 से 9 तक अंक लिखे हैं।

P(0 अंक वाली गेंद प्राप्त होने) $= \frac{1}{10}$

q(1 से 9 तक वाली गेंद का निकालना) $= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

4 गेंदें निकाली गईं अर्थात् $n = 4$

P(उनमें से कोई भी 0 अंक वाली नहीं है।)

$$P(X = 0) = {}^4C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^4 \left(\frac{1}{10}\right)^0$$

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^4$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. एक सत्य-असत्य प्रकार के 20 प्रश्नों वाली परीक्षा में मान लें कि एक विद्यार्थी एक न्याय्य सिक्के को उछालकर प्रत्येक प्रश्न का उत्तर निर्धारित करता है। यदि पासे पर चित प्रकट हो तो वह प्रश्न का उत्तर 'सत्य' देता है और यदि पट प्रकट हो तो 'असत्य' लिखता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह कम-से-कम दो प्रश्नों का सही उत्तर देता है।

हल : मान लीजिए चित आने की संख्या X है।

यहाँ $n = 20, p = \frac{1}{2}$ अर्थात् p (सिक्का उछालने पर चित आता है) $= \frac{1}{2}$

तथा q (सिक्का उछालने पर चित नहीं आता है) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

अतः सत्य उत्तर देने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

असत्य उत्तर देने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

कम से कम 2 प्रश्नों के उत्तर सत्य हैं, तब अभीष्ट प्रायिकता

$P(X \geq 12) = P(X = 12) + P(X = 13) + \ldots.. + P(X = 20)$

$$= {}^{20}C_{12} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + {}^{20}C_{13} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \ldots. {}^{20}C_{20} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$= \frac{1}{2^{20}} [{}^{20}C_{12} + {}^{20}C_{13} + \ldots.. + {}^{20}C_{20}]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{20} [{}^{20}C_{12} + {}^{20}C_{13} + \ldots.. + {}^{20}C_{20}].$$ **उत्तर**

प्रश्न 8. मान लीजिए कि X का बंटन $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ द्विपद बंटन है। दर्शाइए कि $X = 3$ अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम है।

हल : दिया है, यहाँ पर X का बंटन द्विपद बंटन है जहाँ

$n = 6, p = \frac{1}{2}, q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$

$$P(X=0) = {}^6C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X=1) = {}^6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X=2) = {}^6C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 15\left(\frac{1}{2}\right)^6 \qquad \left[\because {}^6C_2 = \frac{6\times5}{1.2} = 15\right]$$

$$P(X=3) = {}^6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20\left(\frac{1}{2}\right)^6 \qquad \left[\because {}^6C_3 = \frac{6\times5\times4}{3.2.1} = 20\right]$$

$$P(X=4) = {}^6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = {}^6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X=5) = {}^6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = {}^6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(X=6) = {}^6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

अत: $X = 3$ अधिकतम प्रायिकता वाला परिणाम $20\left(\frac{1}{2}\right)^6$ है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. एक बहु-विकल्पीय परीक्षा में 5 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक के तीन सम्भावित उत्तर हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि एक विद्यार्थी केवल अनुमान लगाकर चार या अधिक प्रश्नों के सही उत्तर दे देगा ?

हल : तीन सम्भावित उत्तरों में से एक उत्तर सही है, की संख्या = 3

$$q(\text{उत्तर सही है}) = \frac{1}{3} = p(\text{मान लिया})$$

$$P(\text{उत्तर सही नहीं है}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = q$$

P(4 या 5 प्रश्नों के उत्तर सही हैं) $= P(4) + P(5) = {}^5C_4\, q\, p^4 + {}^5C_5\, p^5$

p, q का मान रखने पर

$$P(4) + P(5) = 5\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^5 [5 \times 2 + 1]$$

$$= 11 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{243}.$$

उत्तर

प्रश्न 10. एक व्यक्ति एक लाटरी के 50 टिकट खरीदता है, जिसमें उसके प्रत्येक में जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{100}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह (a) न्यूनतम एक बार (b) तथ्यतः एक बार (c) न्यूनतम दो बार इनाम जीत लेगा।

हल : प्रत्येक टिकट से लॉटरी के जीतने की प्रायिकता $(p) = \frac{1}{100}$

और हारने की प्रायिकता $(q) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$

(a) अतः न्यूनतम एक बार जीतने की प्रायिकता $= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ उत्तर

(b) तथ्यतः एक बार जीतने की प्रायिकता $= {}^{50}C_1\, q^{50-1}\, p$

$$= 50\left(\frac{99}{100}\right)^{49}\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}.$$ उत्तर

(c) न्यूनतम दो बार जीतने की प्रायिकता $= P(2) + P(3) + ... + P(50)$

$$= 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50} - {}^{50}C_1\left(\frac{99}{100}\right)^{49}\times\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^{50} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$$

$$= 1-\left(\frac{99}{100}\right)^{49}\left[\frac{99}{100}+\frac{1}{2}\right]$$

$$= 1-\left(\frac{149}{100}\right)\times\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$$ उत्तर

प्रश्न 11. एक पासे को 7 बार उछालने पर तथ्यतः दो बार 5 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक पासे को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

एक 5 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6} = p$

5 न आने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6} = q$

7 उछालों में ठीक दो बार 5 आने की प्रायिकता

$$= {}^{7}C_2\, q^5\, p^2, \qquad (\because n = 7)$$

$$= {}^7C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{7\times6}{1\times2}\times\frac{5^5}{6^7}$$

$$= \frac{21\times5^5}{6^7} = \frac{21}{36}\times\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$$= \frac{7}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^5.$$ **उत्तर**

प्रश्न 12. एक पासे को छः बार उछालने पर अधिकतम 2 बार छः आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक पासे को उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

एक छः प्राप्त होने की प्रायिकता $= \frac{1}{6} = p$

तथा एक छः न प्राप्त होने की प्रायिकता $= 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} = q$

एक पासे को छः बार उछाला गया। अधिकतम दो बार 6 प्राप्त हुआ।

छः उछालों में अधिकतम दो बार 6 प्राप्त होने की प्रायिकता

$$= P(0) + P(1) + P(2)$$

$$= q^6 + {}^6C_1\, q^5\, p + {}^6C_2\, q^4\, p^2$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \frac{6}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{6\times5}{1\times2}\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times\left[\frac{25}{36}+\frac{5}{6}+\frac{15}{36}\right]$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{25+30+15}{36}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{70}{36}\right)$$

$$= \frac{35}{18}\times\left(\frac{5}{6}\right)^4.$$ **उत्तर**

प्रश्न 13. यह ज्ञात है कि किसी विशेष प्रकार की निर्मित वस्तुओं की संख्या में 10% खराब है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इस प्रकार की 12 वस्तुओं की यादृच्छिक प्रतिदर्श में से 9 खराब हों ?

हल : दी गयी निर्मित वस्तुओं में खराब वस्तु होने की प्रायिकता $(p) = 10\% = \frac{1}{10}$

खराब वस्तु न होने की प्रायिकता $(q) = 1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

12 वस्तुओं में से 9 वस्तुएँ खराब होने की प्रायिकता

$$= {}^{12}C_9 \left(\frac{9}{10}\right)^{12-9}\left(\frac{9}{10}\right)^9$$

$$= {}^{12}C_3 \times \frac{9^3}{10^3}\times\frac{1}{10^9}$$

$$= \frac{12\times11\times10}{1\times2\times3}\times\frac{9^3}{10^{12}} = \frac{22\times9^3}{10^{11}}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 14. एक बॉक्स में 100 बल्ब हैं जिसमें 10 त्रुटियुक्त हैं। 5 बल्ब के नमूने में से किसी भी बल्ब के त्रुटियुक्त न होने की प्रायिकता है—

(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

(C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

हल : बॉक्स में बल्बों की संख्या = 100

खराब बल्बों की संख्या = 10

$$\text{खराब बल्ब प्राप्त होने की प्रायिकता} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \text{ अच्छे बल्ब के प्राप्त होने की प्रायिकता} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

5 बल्बों के प्रतिदर्श में, किसी भी बल्ब के खराब न होने की प्रायिकता

$$= \left(\frac{9}{10}\right)^5$$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 15. एक छात्र की तैराक न होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। तब 5 छात्रों में से 4 छात्रों की तैराक होने की प्रायिकता है—

(A) ${}^5C_4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1 \ \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) इनमें से कोई नहीं।

हल : एक छात्र के तैराक न होने की प्रायिकता $= \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ छात्र के तैराक होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

छात्रों का प्रायिकता बंटन जो तैराक है $= \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)^5$

$\Rightarrow$ 5 छात्रों में से 4 छात्रों की तैराक होने की प्रायिकता $= {}^5C_4 = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. *A* और *B* इस प्रकार घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0$, $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए यदि (i) *A*, समुच्चय *B* का उपसमुच्चय है (ii) $A \cap B = \phi$.

हल : (i) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = \text{A}$ [$\because$ *A*, समुच्चय *B* का उपसमुच्चय है।]

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$ उत्तर

(ii) $A \cap B = \phi$ अर्थात् $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

$$\Rightarrow \quad P(B \cap A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0.$$ उत्तर

प्रश्न 2. एक दम्पति के दो बच्चे हैं

(i) दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि दोनों बच्चों में से कम-से-कम एक बच्चा लड़का है।

(ii) दोनों बच्चों के लड़की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यह ज्ञात है कि बड़ा बच्चा लड़की है।

हल : (i) मान लीजिए लड़का होने तथा लड़की होने की घटना क्रमशः A तथा B हों, और उन्हें B तथा G से व्यक्त करें, तब

घटना A = दोनों बच्चे लड़के हैं = $\{B, B\}$

B = दोनों बच्चों में से कम-से-कम एक लड़का है = $\{BG, GB, BB\}$

$\therefore \quad A \cap B = \{BB\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ तथा } P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{3}.$$ उत्तर

(ii) माना कि A = दोनों बच्चे लड़कियाँ हैं = $\{GG\}$

B = बड़ा बच्चा लड़की है = $\{GG, GB\}$

$A \cap B = \{GG\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ तथा } P(B) = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\therefore \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ उत्तर

प्रश्न 3. कल्पना कीजिए कि 5% पुरुषों और 0.25% महिलाओं के बाल सफेद हैं। एक सफेद बालों वाले व्यक्ति को यादृच्छिक चुना गया है। इस व्यक्ति के पुरुष होने की प्रायिकता क्या है ? यह मान लें कि पुरुषों और महिलाओं की संख्या समान है।

हल : मान लीजिए पुरुषों की संख्या समान है।

घटना E_1 = पुरुष का होने, E_2 = महिला का होना

A : सफेद बाल का होना

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{1}{2}, \; P(E_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A/E_1) = 5\% = 0.05$$

$$P(A/E_2) = 0.25\% = 0.0025$$

अतः बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 0.05}{\frac{1}{2} \times 0.05 + \frac{1}{2} \times 0.0025}$$

$$= \frac{500}{500+25} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21}.$$ उत्तर

प्रश्न 4. मान लीजिए कि 90% लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हैं। इसकी प्रायिकता क्या है कि 10 लोगों में से यादृच्छया चुने गए अधिक-से-अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हों ?

हल : व्यक्ति के दाहिने हाथ से काम करने की प्रायिकता (p)

$$= 90\% = 0.9 = \frac{9}{10}$$

$\therefore$ $$q = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \text{ और } n = 10$$

P(अधिक-से-अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करते हैं)

$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$= 1 - [P(7) + P(8) + P(9) + P(10)]$

$$= 1 - \left[{}^{10}C_7 \left(\frac{1}{10}\right)^3 \left(\frac{9}{10}\right)^7 + {}^{10}C_8 \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^8 + {}^{10}C_9 \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^9 + {}^{10}C_{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \right].$$

$$= 1 - \sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$$ उत्तर

प्रश्न 5. एक कलश (पात्र) में 25 गेंदें हैं, जिनमें से 10 गेंदों पर चिह्न X अंकित है और शेष 15 पर चिह्न Y अंकित है। कलश में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है और उस पर अंकित चिह्न को नोट (लिख) करके उसे कलश में प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। यदि इस प्रकार से 6 गेंदें निकाली जाती हों, तो निम्नलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :

(i) सभी पर चिह्न X अंकित हो।

(ii) 2 से अधिक पर चिह्न Y नहीं अंकित हो।

(iii) कम-से-कम एक गेंद पर चिह्न Y अंकित हो।

(iv) 'X' तथा 'Y' चिह्नों से अंकित गेंदों की संख्याएँ समान हों।

हल : कुल गेंदों की संख्या = 25

मान लीजिए घटना A तथा B गेंद पर X और Y की स्थिति को दर्शाता है।

यहाँ $n = 6$, गेंदें जो कलश से निकाली गईं।

$\therefore$ $$P(A) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \text{ तथा } P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(i) P (सभी पर चि□ X हो) $= P(x = 6) = \left(\frac{2}{5}\right)^6.$ उत्तर

(ii) घटना : 2 से अधिक गेंद पर Y अंकित न होना = $\{(6X, 0Y), (5X, 1Y), (4X, 2Y)\}$

$\therefore$ P(दो से अधिक गेंदों पर Y अंकित न होना) $= P(6) + P(5) + P(4)$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^6 + {}^6C_5 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^5 + {}^6C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left[\frac{4}{25} + \frac{6}{1} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{6\times5}{1\times2} \times \frac{9}{25}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left[\frac{4}{25} + \frac{36}{25} + \frac{135}{25}\right]$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^4 \frac{175}{25} = 7 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4$$ उत्तर

(iii) घटना : कम-से-कम एक गेंद पर Y अंक़ित हो।

$$= \{(5X, Y), (4X, 2Y), (3X, 3Y), (2X, 4Y), (1X, 5Y), (0X, 6Y)\}$$

P(कम-से-कम एक गेंद पर Y लिखा हो)

$$= P(5) + P(4) + P(3) + \{P(2) + P(1) + P(0)$$

$$= 1 - P(6) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^6$$ उत्तर

(iv) घटना : X तथा Y चि□ों से अंकित गेंदों की संख्या समान हो।

$P\{(3X, 3Y)\}$

$$P(3) = {}^6C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$= \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} \times \frac{27}{125} \times \frac{8}{125}$$

$$= 20 \times \frac{27}{125} \times \frac{8}{125} = \frac{864}{3125}.$$ उत्तर

प्रश्न 6. एक बाधा दौड़ में एक प्रतियोगी को 10 बाधाएँ पार करनी हैं। इसकी प्रायिकता कि वह प्रत्येक बाधा को पार कर लेगा $\frac{5}{6}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह 2 से कम बाधाओं को गिरा देगा (नहीं पार कर पाएगा)?

हल : दिए गए कुल बाधाओं की संख्या = 10

मान लीजिए बाधा को पार करने की प्रायिकता $(p) = \frac{5}{6}$

अत: बाधा को पार न करने की प्रायिकता $(q) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

$\therefore$ P(दो से कम बाधाओं को पार न करना)

$$= P(10) + P(9)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + {}^{10}C_9 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + {}^{10}C_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{9}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{9}\left[\frac{5}{6}+10\times\frac{1}{6}\right]=\left(\frac{5}{6}\right)^{9}\times\frac{15}{6}$$

$$= \frac{5}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{9} = \frac{5^{10}}{2\times 6^{9}}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. एक पासे को बार-बार तब तक उछाला जाता है जब तक कि उस पर 6 का अंक तीन बार प्राप्त नहीं हो जाता। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर तीसरा 6 का अंक उसे छठी बार उछालने पर प्राप्त होता है।

हल : पासे की उछाल में पासे पर 6 आने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$ अर्थात् $p = \frac{1}{6}$

∴ पासे पर 6 न आने की प्रायिकता $(q) = 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

P(पासे पर 5 उछालों पर 2 बार 6 और 3 बार 6 न आना)

$$= {}^5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$$

$$P(\text{छठी बार में 6 आना}) = {}^5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\times\frac{1}{6}=\frac{10\times 5^3}{6^6}$$

$$= \frac{1250}{46656}=\frac{625}{23328}.$$ उत्तर

प्रश्न 8. यदि एक लीप वर्ष को यादृच्छया चुना गया हो तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उस वर्ष में 53 मंगलवार होंगे।

हल : एक लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं।.इसमें 52 पूर्ण सप्ताह हैं और 2 दिन शेष रहते हैं। इन दोनों दिनों को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

(सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार), (बुधवार, बृहस्पतिवार), (बृहस्पतिवार, शुक्रवार), (शुक्रवार, शनिवार) (शनिवार, रविवार), (रविवार, सोमवार)

इस प्रकार के कुल समूहों की संख्या = 7

इनमें से मंगलवार दो बार आता है। यानी (सोमवार, मंगलवार), (मंगलवार, बुधवार)

अतः लीप वर्ष में 53 मंगलवार आने की प्रायिकता = $\frac{2}{7}$. उत्तर

प्रश्न 9. एक प्रयोग के सफल होने का संयोग उसके असफल होने से दो गुना है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अगले छः परीक्षणों में कम-से-कम 4 सफल होंगे।

हल : मान लीजिए सफल होने की प्रायिकता p है और असफल होने की प्रायिकता q हो, तब

$$p = 2q = 2(1-p) = 2-2p$$

या $$3p = 2 \text{ या } p = \frac{2}{3}, \text{ और } q = \frac{1}{3}$$

P(अगली 6 परीक्षणों में कम-से-कम 4 सफलताएँ हैं)

$$= P(4) + P(5) + P(6)$$
$$= {}^6C_4\, q^2 p^4 + {}^6C_5\, qp^5 + p^6$$
$$= \frac{6\times5}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^6$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left[\frac{6\times5}{2}\times\frac{1}{9}+\frac{6}{1}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right]$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left[\frac{15}{9}+\frac{12}{9}+\frac{4}{9}\right]=\frac{31}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

उत्तर

प्रश्न 10. एक व्यक्ति एक न्याय्य सिक्के को कितनी बार उछाले कि कम-से-कम एक चित की प्रायिकता 90% से अधिक हो।

हल : मान लीजिए सिक्के को n बार उछाला जाता है।

अतः एक सिक्के को उछालने पर चित आने की प्रायिकता $(p) = \frac{1}{2}$

तथा एक सिक्के को उछालने पर चित न आने की प्रायिकता $(q) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

n सिक्कों को उछालने पर कोई भी चित न आने की प्रायिकता $= \left(\frac{1}{2}\right)^n$

तथा कम-से-कम एक चित आने की प्रायिकता $= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

दिया गया है : $\quad 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n > 90\%$

$\therefore \quad 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.9$

या $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1-0.9 = 0.1$ या $n \geq 4$

$\therefore$ 4 सिक्के उछालने पर कम-से-कम एक चित आने की प्रायिकता 90% होगी। उत्तर

प्रश्न 11. एक खेल में किसी व्यक्ति को एक न्याय्य पासे को उछालने के बाद छः प्रकट होने पर एक रुपया मिलता है और अन्य कोई संख्या प्रकट होने पर वह एक रुपया हार जाता है। एक व्यक्ति यह निर्णय लेता है कि वह पासे को तीन बार फेंकेगा लेकिन जब भी छः प्राप्त होगा वह खेलना छोड़ देगा। उसके द्वारा जीती/हारी गई राशि की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए।

हल : एक सिक्के को उछाले जाने पर 6 आने की प्रायिकता $(p) = \frac{1}{6}$

और 6 न आने की प्रायिकता (q)

$$= 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

(i) यदि पहली उछाल में 6 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

(ii) यदि पहली उछाल में 6 न आए, परन्तु दूसरी उछाल में 6 आए, तो प्रायिकता

$$= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

(iii) पहली दोनों उछालों में 6 न आए परन्तु तीसरी उछाल में 6 आए, तो प्रायिकता

$$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

पहली बार में 6 आने पर उसे 1 रुपया मिलता है।

दूसरी बार में 6 आने पर $-1 + 1 = 0$ रुपया मिलता है।

तीसरी बार में 6 आने पर $-1 - 1 + 1 = -1$ रुपया मिलता है अर्थात् 1 रुपया की हानि होती है।

$\therefore$ प्रायिकता बंटन इस प्रकार है–

X	1	0	-1
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{21}{216}$

$$\text{प्रत्याशा} = 1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{5}{36} + (-1) \times \frac{25}{216}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{25}{216} = \frac{36-25}{216} = \frac{11}{216}$$

$\therefore$ उसके द्वारा जीती गई राशि की प्रत्याशा $= \frac{11}{216}$. **उत्तर**

प्रश्न 12. मान लीजिए हमारे पास A, B, C और D बक्से हैं जिसमें रखी संगमरमर की लाल, सफेद और काली टुकड़ियों का विवरण निम्न तरीके से है। यादृच्छया एक बॉक्स चुना जाता है तथा इससे एक टुकड़ा निकाला जाता है। यदि टुकड़ा लाल हो तो इसे बॉक्स A, बॉक्स B, बॉक्स C से निकाले जाने की क्या प्रायिकता है ?

बॉक्स	संगमरमर की टुकड़ियों का रंग		
	लाल	सफेद	काला
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

हल : दिए गए 4 बॉक्स में से एक बॉक्स चुने जाने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

अर्थात् $$P(E) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

मान लीजिए A घटना लाल रंग की टुकड़ी निकलना है, बॉक्स A में कुल 10 टुकड़ियाँ हैं जिनमें 1 लाल है।

$$\therefore \quad P(A/E_1) = \frac{1}{10}$$

इसी प्रकार $P(A/E_2) = \frac{6}{10}$, $P(A/E_3) = \frac{8}{10}$ और $P(A/E_4) = 0$

$\therefore$ बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)P(A/E_1)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3) + P(E_4)P(A/E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times 0}$$

$$= \frac{1}{1+6+8} = \frac{1}{15}.$$

(ii) पुनः बेज प्रमेय से $P(E_2A)$

$$= \frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3) + P(E_4)P(A/E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{6}{10}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times 0}$$

$$= \frac{6}{1+6+8} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

तथा (iii) बेज प्रमेय से $P(E_3/A)$

$$= \frac{P(E_3)P(A/E_3)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3) + P(E_4)P(A/E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{8}{10}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{6}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{4} \times 0}$$

$$= \frac{8}{1+6+8} = \frac{8}{15}.$$

अतः लाल रंग की टुकड़ी बॉक्स A, बॉक्स B, बॉक्स C से चुने जाने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ और $\frac{8}{15}$ है।

उत्तर

प्रश्न 13. मान लीजिए किसी रोगी को दिल का दौरा पड़ने का संयोग 40% है। यह मान लिया जाता है कि ध्यान और योग विधि दिल का दौरा पड़ने के खतरे को 30% कम कर देता है और दवा द्वारा खतरे को 25% कम किया जा सकता है। किसी भी समय रोगी इन दोनों में से किसी एक विकल्प का चयन करता है। यह दिया गया है कि उपरोक्त विकल्पों से किसी एक का चुनाव करने वाले रोगियों से यादृच्छया चुना गया रोगी दिल के दौरे से ग्रसित हो जाता है। रोगी द्वारा ध्यान और योग विधि का उपयोग किए जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए घटना E_1, E_2 तथा E क्रमशः ध्यान व योग से लाभ की घटना, दवा द्वारा इलाज की घटना और दिल का दौरा पड़ने की घटनाएँ हों, तब

$$P(E_1) = \frac{1}{2},\ P(E_2) = \frac{1}{2},\ P(E) = 40\% = 0.4$$

दिया गया है कि ध्यान व योग से दिल का दौरा पड़ने का खतरा 30% कम हो जाता है।
अर्थात् दिल का दौरा 70% खतरा है।
या E/E_1 = ध्यान व योग से दिल का दौरा पड़ता है।

$$\therefore \qquad P(E/E_1) = 0.40 \times 7.0 = 0.28$$

तथा दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने का 25% खतरा कम हो जाता है।
अर्थात् दवा द्वारा दिल का दौरा पड़ने से खतरा 75% है।

$$\therefore \qquad P(E/E_2) = 0.4 \times 0.75 = 0.30$$

इस प्रकार

$$P(E_1) = \frac{1}{2},\ P(E_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(E/E_1) = 0.28,\ P(E/E_2) = 0.30$$

अतः बेज प्रमेय से,

$$P(E_1/E) = \frac{P(E_1)P(E/E_1)}{P(E_1)P(E/E_1) + P(E_2)P(E/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times 0.28}{\frac{1}{2}\times 0.28 + \frac{1}{2}\times 0.30} = \frac{28}{28+30}$$

$$= \frac{28}{58} = \frac{14}{29}.$$ उत्तर

प्रश्न 14. यदि दो कोटि के एक सारणिक के सभी अवयव शून्य या एक हो तो सारणिक का धनात्मक मान होने की क्या प्रायिकता है ? (मान लीजिए कि सारणिक के प्रत्येक अवयव स्वतंत्र रूप से चुने जा सकते हैं तथा प्रत्येक की चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।)

हल : चूँकि 2 कोटि के एक सारणिक में अवयवों की संख्या = 4

$\therefore$ सारणिकों द्वारा बनी संख्या $= 2^4 = 16$

जिसके धनात्मक सारणिक केवल $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ और $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

इस प्रकार उपरोक्त सारणिक के प्रत्येक अवयव को चुनने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}.$ उत्तर

प्रश्न 15. एक इलेक्ट्रॉनिक एसेंबली के दो सहायक निकाय A और B हैं। पूर्ववर्ती निरीक्षण द्वारा निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात हैं :

P(A के असफल होने की) = 0.2

P(B के अकेले असफल होने की) = 0.15

P(A और B के असफल होने की) = 0.15

तो निम्न प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए :

(i) P(A असफल/B असफल हो चुकी हो)

(ii) P(A के अकेले असफल होने की)।

हल : मान लीजिए घटना A और B के असफल होने को क्रमशः A', B' से व्यक्त किया गया है।

प्रश्नानुसार $P(A') = 0.2$

$P(A$ और B के असफल होना$) = P(A' \cap B') = 0.15$

$P(B$ के अकेले असफल होना$) = P(B') - P(A' \cap B') = 0.15$

या $P(B') - 0.15 = 0.15$

$\therefore$ $P(B') = 0.15 + 0.15 = 0.30$

(i)
$$P(A'/B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')}$$

$$= \frac{0.15}{0.30} = \frac{1}{2} = 0.5.$$ उत्तर

(ii) $P(A$ अकेले असफल होता है$) = P(A$ अकेले ही$)$

$= P(A') - P(A' \cap B')$

$= 0.2 - 0.15 = 0.05.$ उत्तर

प्रश्न 16. थैले 1 में 3 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं तथा थैला 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं। एक गेंद को थैला 1 से थैला 2 में स्थानान्तरित किया जाता है और तब एक गेंद थैले 2 से निकाली जाती है। निकाली गई गेंद लाल रंग की है। स्थानान्तरित गेंद की काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : थैले 1 में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं।

तथा थैले 2 में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं।

मान लीजिए घटना E_1 तथा E_2 थैले 1 से लाल गेंद और काली गेंद निकालने की हों, तब

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{3}{7}, \; P(E_2) = \frac{4}{7}$$

घटना A : लाल रंग की गेंद निकालना

एक लाल गेंद थैले 1 से निकाल कर 2 में रख दी गई। इस प्रकार थैले 2 में 5 लाल और 5 काली गेंदें हो गईं।

$$\therefore \quad P(A/E_1) = \frac{5}{10}$$

एक काली गेंद थैले 1 से निकालकर थैला 2 में रख दी। इस प्रकार दूसरे थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदें हैं।

$$\therefore \quad P(A/E_2) = \frac{4}{10}$$

बेज प्रमेय से,
$$P(E_2/A) = \frac{P(E_2)P(A/E_2)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{7} \times \frac{5}{10} + \frac{4}{7} \times \frac{4}{10}} = \frac{16}{15+16}$$

$$= \frac{16}{31}.$$ उत्तर

निम्नलिखित प्रश्नों के सही उत्तर का चुनाव कीजिए :

प्रश्न 17. यदि A और B दो ऐसी घटनाएँ हैं कि $P(A) \neq 0, P(B/A) = 1$ तब :

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$

(C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

हल : $$P(B/A) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$$

जहाँ $$A \subset B, A \cap B = P(A)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A)$$

अत: विकल्प (A) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 18. यदि $P(A/B) > P(A)$, तब निम्न में से कौन सही है ?

(A) $P(B/A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B)$

(C) $P(B/A) > P(B)$ (D) $P(B/A) = P(B)$

हल : $$P(A/B) > P(A)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) > P(A).P(B)$$

या $$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B)$$

$$\Rightarrow \quad P(B/A) > P(B)$$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 19. यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि $P(A) + P(B) - P(A$ और $B) = P(A)$ तब :

(A) $P(B/A) = 1$ (B) $P(A/B) = 1$

(C) $P(B/A) = 0$ (D) $P(A/B) = 0$

हल : $$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) - P(A \cap B) = 0$$

या $$P(A \cap B) = P(B)$$

या $$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1$$

या $$P\left(\frac{A}{B}\right) = 1$$

अत: विकल्प (B) सही है। **उत्तर**