अध्याय-11

त्रि-विमीय ज्यामिती

(Three-Dimensional Geometry)

(Important Formulae and Definitions)

1. एक बिन्दु $\vec{a}$ से जाने वाली सदिश $\vec{b}$ के समान्तर रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + n\vec{b}$$

2. दो बिन्दुओं $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + n(\vec{b} - \vec{a})$$

3. एक बिन्दु से जाने वाले तथा दो असमान्तर सदिशों के समान्तर समतल का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b} + s\vec{c}$$

4. तीन बिन्दुओं से जाने वाले समतल का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$$

5. चार बिन्दुओं के एक समतलीय होने का प्रतिबन्ध यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तथा $\vec{d}$ चार बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं, तो

$$\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} + v\vec{d} = 0, \text{ जहाँ } 1 + \lambda + \mu + v = 0.$$

प्रश्नावली 11·1

प्रश्न 1. यदि एक रेखा x, y और z अक्षों के साथ क्रमशः 90°, 135°, 45° के कोण बनाती है तो इसकी दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए रेखा की दिक्-कोसाइन $l, m,$ तथा n हैं।

अत:
$$l = \cos 90° = 0$$
$$m = \cos 135°$$
$$= \cos (180° - 45°)$$

$$= -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

तथा $$n = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः दिक्-कोसाइन हैं : $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\frac{1}{\sqrt{2}}$. उत्तर

प्रश्न 2. एक रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों के साथ समान कोण बनाती है।

हल : मान लीजिए एक रेखा निर्देशांक्षों के साथ कोण α बनाती है।

अतः रेखा के दिक्-कोसाइन $\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$ होंगे।

परन्तु हम जानते हैं कि

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

या $$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

या $$3\cos^2\alpha = 1$$

या $$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

अतः रेखा के दिक्-कोसाइन $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं। उत्तर

प्रश्न 3. यदि एक रेखा के दिक्-अनुपात –18, 12, –4 हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन क्या हैं ?

हल : मान लीजिए a, b, c रेखा के दिक्-अनुपात हों तो

यहाँ $$a = -18, b = 12, c = -4$$

$$\therefore \quad \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(-18)^2+12^2+(-4)^2}$$

$$= \sqrt{324+144+16} = \sqrt{484} = 22$$

अतः दिक्-कोसाइन : $$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-18}{22} = \frac{-9}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-4}{22} = \frac{-2}{11}$$

अतः रेखा के दिक्-कोसाइन = $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}$ तथा $\frac{-2}{11}$. उत्तर

प्रश्न 4. दर्शाइए कि बिन्दु (2, 3, 4), (–1, –2, 1), (5, 8, 7) संरेख हैं।

हल : मान लीजिए दिए गए बिन्दु A(2, 3, 4), B(–1, –2, 1), C(5, 8, 7)

अतः $$AB = \sqrt{(-1-2)^2+(-2-3)^2+(1-4)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

$$BC = \sqrt{(5+1)^2+(8+2)^2+(7-1)^2}$$

$$= \sqrt{6^2+10^2+6^2} = \sqrt{36+100+36}$$
$$= \sqrt{172} = 2\sqrt{43}$$

तथा
$$CA = \sqrt{(2-5)^2+(3-8)^2+(4-7)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43}$$

अब
$$CA+AB = \sqrt{43} + \sqrt{43} = 2\sqrt{43} = BC$$

अत: A, B, C सरेख हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु (3, 5, –4), (–1, 1, 2) और (–5, –5, –2) हैं।

हल : मान लीजिए त्रिभुज ABC के शीर्ष A(3, 5, –4), B(–1, 1, 2) और C(–5, –5, –2) हैं।

(i) भुजा AB के दिक्-अनुपात = – 1 – 3, 1 – 5, 2 + 4 = – 4, – 4, 6

$\therefore$ AB के बीच की दूरी $= \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+6^2} = \sqrt{16+16+36}$
$$= \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

अत: AB की दिक्-कोसाइन
$$= \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{6}{2\sqrt{17}}$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}.$$
उत्तर

(ii) BC के दिक्-अनुपात – 5 + 1, – 5 –1, – 2 – 2 = – 4, – 6, – 4

$\therefore$ BC के बीच की दूरी $= \sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}$
$$= \sqrt{16+36+16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

अत: BC के दिक्-कोसाइन
$$= \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{-6}{2\sqrt{17}}, \frac{-4}{2\sqrt{17}}.$$

या
$$= \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}.$$
उत्तर

(iii) इसी प्रकार भुजा CA की दिक्-अनुपात 3 + 5, 5 + 5, – 4 + 2 = 8, 10, –2

$\therefore$ CA के बीच की दूरी $= \sqrt{8^2+10^2+(-2)^2}$
$$= \sqrt{64+100+4}$$
$$= \sqrt{168} = 2\sqrt{42}$$

अत: CA की दिक्-कोसाइन
$$= \frac{8}{2\sqrt{42}}, \frac{10}{2\sqrt{42}}, \frac{-2}{2\sqrt{42}}.$$
$$= \frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}.$$
उत्तर

प्रश्नावली 11.2

प्रश्न 1. दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}; \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}; \frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली तीन रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं।

हल : यदि दो रेखाएँ लम्बवत् हों, तो

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

मान लीजिए दिए गए द्विक् कोसाइनों से क्रमश: AB, CD, EF अभीष्ट रेखाएँ हों, तब परस्पर लम्बवत् हेतु

$$AB \perp CD = 0$$
$$CD \perp EF = 0$$

और $$AB \perp EF = 0$$

दिया है :

$$l_1 = \frac{12}{13},\ m_1 = \frac{-3}{3},\ n_1 = \frac{-4}{13}$$

$$l_2 = \frac{4}{13},\ m_2 = \frac{12}{13} \text{ तथा } n_2 = \frac{3}{13}$$

$$\therefore \quad \frac{12}{13} \times \frac{4}{13} + \left(\frac{-3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{-4}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{48-36-12}{13 \times 13} = 0$$

अत: प्रथम दो द्विक कोसाइनों से रेखाएँ लम्बवत् हैं।

अब CD और EF हेतु

$$\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) + \left(\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{4}{13}\right) + \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{12}{169} - \frac{48}{169} + \frac{36}{169} = 0$$

और AB और EF हेतु,

$$\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) + \left(\frac{-3}{13}\right)\left(-\frac{4}{13}\right) + \left(\frac{-4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{36}{169} + \frac{12}{169} - \frac{48}{169} = 0$$

अत: AB, CD और EF तीनों ही रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 2. दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, – 1, 2), (3, 4, – 2) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6,) से जाने वाली रेखा पर लम्ब है।

हल : मान लीजिए प्रश्नानुसार बिन्दु $A(1, -1, 2)$ एवं $B(3, 4, -2)$ हैं। अत: बिन्दु $A(1, -1, 2)$ एवं $B(3, 4, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात $3 - 1, 4 + 1, -2 - 2$ या $2, 5, -4$ होंगे।

इसी प्रकार माना कि प्रश्नानुसार $C(0, 3, 2)$ एवं $D(3, 5, 6)$ हैं। अत: बिन्दु $C(0, 3, 2)$ और $D(3, 5, 6,)$ से होकर जाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात $3 - 0, 5 - 3, 6 - 2$ या $3, 2, 4$ होंगे। अब यदि $AB \perp CD$ तो

$$a_1 a_1 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

अत: $$2 \times 3 + 5 \times 2 + (-4) \times 4 = 6 + 10 - 16 = 0$$

अत: प्रश्नानुसार दिए बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखाएँ अर्थात् AB रेखा CD पर लम्ब हैं। **उत्तर**

प्रश्न 3. दर्शाइए कि बिन्दुओं (4, 7, 8), (2, 3, 4) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (– 1 – 2, 1) और (1, 2, 5) से जाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल : मान लीजिए दिए गए बिन्दु $A(4, 7, 8)$ तथा $B(2, 3, 4)$ हैं। अत: बिन्दु $A(4, 7, 8,)$ $B(2, 3, 4)$ से होकर जाने वाली रेखा AB के दिक्-अनुपात $2 - 4, 3 - 7, 4 - 8$ अर्थात् $-2, -4, -4$ या $1, 2, 2$ होंगे।

इसी प्रकार मान लीजिए दिए गए बिन्दु $C(-1, -2, 1)$ तथा $D(1, 2, 5)$ हैं। अत: बिन्दु $C(-1, -2, 1)$ और $D(1, 2, 5)$ से होकर जाने वाली रेखा CD के दिक्-अनुपात $1 - (-1), 2 - (-2), 5 - 1$ या $2, 4, 4$, या $1, 2, 2$ होंगे।

हम जानते हैं कि दो रेखाएँ समान्तर होंगी यदि $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$

यहाँ AB और CD दोनों के दिक्-अनुपात 1, 2, 3 हैं।

अत: AB तथा CD आपस में समान्तर हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 4. बिन्दु (1, 2, 3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समान्तर है।

हल : माना $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

और $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

अभीष्ट रेखा AB का समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}).$$

जहाँ λ एक वास्तविक संख्या है। **उत्तर**

प्रश्न 5. बिन्दु जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ से गुजरने व सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश व कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

यही रेखा का सदिश समीकरण है। **उत्तर**

$\because$ रेखा पर स्थित किसी बिन्दु $P(x, y, z)$ की स्थिति $\vec{r}$ है।

$$\therefore \quad x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$= (2+\lambda)\hat{i} + (-1+2\lambda)\hat{j} + (4-\lambda)\hat{k}$$

λ का विलोपन करने पर,

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

यही अभीष्ट रेखा का कार्तीय रूप है। **उत्तर**

प्रश्न 6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–2, 4, –5) से जाती है और $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ के समान्तर है।

हल : वह रेखा जो बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरती है और उसके दिक्-अनुपात a, b, c हों, तो उसका समीकरण

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

यहाँ पर रेखा (–2, 4, –5) से गुजरती है तथा $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ के समान्तर है। अत: रेखा के दिक्-अनुपात = 3, 5, 6

अत: अभीष्ट रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x-(-2)}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-(-5)}{6}$$

या $$\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : रेखा का सदिश समीकरण : $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$

जो बिन्दु (5, – 4, 6) में होकर जाती है।

अर्थात् $$\vec{a} = 5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$$

दी हुई रेखा के दिक्-अनुपात 3, 7, 2 हैं।

$$\vec{b} = 3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}$$

∴ अभीष्ट रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$$

या $$\vec{r} = 5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}).$$ उत्तर

प्रश्न 8. मूल बिन्दु और (5, –2, 3) से जाने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा मूल बिन्दु (0, 0, 0) व (5, –2, 3) से गुजरती है

∴ $$\vec{a} = 0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k} = \vec{0}$$

रेखा के दिक्-अनुपात = $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$

या 5 – 0, – 2 – 0, 3 – 0 या 5, – 2, 3 हैं।

रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = 5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$$

अभीष्ट रेखा का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$\vec{r} = \vec{0} + \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{r} = \lambda(5\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}).$$ उत्तर

रेखा बिन्दु O(0, 0, 0) से गुजरती है तथा इसके दिक्-अनुपात 5, – 2, 3 हैं। अतः रेखा का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

या
$$\frac{x - 0}{5} = \frac{y - 0}{-2} = \frac{z - 0}{3}$$

या
$$\frac{x}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 9. बिन्दुओं (3, – 2, – 5) और (3, – 2, – 6) से गुजरने वाली रेखा का सदिश तथा कार्तीय रूपों में समीकरण को ज्ञात कीजिए।

हल : माना रेखा बिन्दु $A(3, -2, -5)$ और $B(3, -2, -6)$ से गुजरती है

$\therefore$
$$\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}$$

AB के दिक्-अनुपात $= x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$
या 3 – 3, – 2 + 2, 6 + 5 या 0, 0, 11 हैं।

$\therefore$
$$\vec{b} = 0.\hat{i} - 0.\hat{j} + 11\hat{k} = 11\hat{k}$$

AB का सदिश समीकरण

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$
$$= 3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k} + \lambda(11\hat{k}).$$ उत्तर

$\because$ रेखा बिन्दु A(3, – 2, – 5) तथा (3, – 2, 6) से गुजरती है
$\therefore$ इसके दिक्-अनुपात = 0, 0, 11
अतः रेखा AB का कार्तीय समीकरण

$$\frac{x - 3}{0} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z + 5}{11}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. निम्नलिखित रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

(i)
$$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

और
$$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

(ii)
$$\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$$

और
$$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$$

हल : (i) पहली रेखा
$$\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$$

दूसरी रेखा
$$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

मान लीजिए $\vec{b_1} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

तथा $\vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

जब दोनों रेखाओं के बीच कोण θ हो, तब

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$

$$= \left|\frac{(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}).(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{|3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}||\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}|}\right|$$

$$= \left|\frac{3.1 + 2.2 + 6.2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{3 + 4 + 12}{\sqrt{9 + 4 + 36}\sqrt{1 + 4 + 4}}\right| = \left|\frac{19}{\sqrt{49}\sqrt{9}}\right|$$

$$= \left|\frac{19}{7 \times 3}\right| = \frac{19}{21}$$

अत: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right).$ **उत्तर**

(ii) पहली रेखा $\vec{r} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

दूसरी रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - 56\hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})$

माना $\vec{b_1} = \hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

तथा $\vec{b_2} = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$

जब दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ है अत:

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}.\vec{b_2}}{|\vec{b_1}||\vec{b_2}|}\right|$$

$$= \left|\frac{(\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}).(3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k})}{|\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}||3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}|}\right|$$

$$= \left|\frac{1.3 + (-1)(-5) + (-2)(-4)}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}.\sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (-4)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{3 + 5 + 8}{\sqrt{1 + 1 + 4}\sqrt{9 + 25 + 16}}\right| = \left|\frac{16}{\sqrt{6}\sqrt{50}}\right|$$

$$= \left|\frac{16}{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{16}{10\sqrt{3}}\right| = \frac{8}{5\sqrt{3}}$$

अत: $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right).$$ उत्तर

प्रश्न 11. निम्नलिखित रेखा युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ **और** $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ **और** $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

हल : **(i)** दी गयी पहली रेखा $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ के लिए दिक्-अनुपात = 2, 5, 3

तथा दूसरी रेखा $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$ के दिक्-अनुपात = −1, 8, 4

माना θ दी गयी रेखाओं के मध्य का कोण हो, तब

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

अर्थात् मान लीजिए $a_1 = 2, b_1 = 5, c_1 = -3$ तथा $a_2 = -1, b_2 = 8, c_2 = 4$

$$\therefore \quad \cos\theta = \left(\frac{2\times(-1) + (5\times 8) + (-3)\times 4}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2}\sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 4^2}}\right)$$

$$= \left|\frac{-2 + 40 - 12}{\sqrt{4 + 25 + 9}\sqrt{1 + 64 + 16}}\right|$$

$$= \left|\frac{-26}{\sqrt{38}\sqrt{81}}\right|$$

$$\cos\theta = \frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right).$$ उत्तर

(ii) पहली रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ के दिक्-अनुपात = 2, 2, 1

तथा दूसरी रेखा $\frac{x-5}{4}, \frac{y-2}{1}, \frac{z-3}{8}$ के दिक्-अनुपात = 4, 1, 8

मान लीजिए $a_1 = 2, b_1 = 2, c_1 = 1$ तथा $a_2 = 4, b_2 = 1, c_2 = 8$

तथा माना दी हुई रेखाओं के बीच कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

$$= \left| \frac{2 \times 4 + 2 \times 1 + 1 \times 8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{8 + 2 + 8}{\sqrt{9}\sqrt{81}} \right| = \frac{18}{3 \times 9} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right).$ **उत्तर**

i Žu 12. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हों।

हल : दी हुई रेखाओं को मानक रूप में रखने पर

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{\frac{2p}{7}} = \frac{z-3}{2} \text{ और } \frac{x-1}{-\frac{3p}{7}} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$$

अब पहली रेखा के दिक्-अनुपात $= -3, \frac{2p}{7}, 2$

तथा दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात $= \frac{-3p}{7}, 1, -5$

अर्थात् मान लीजिए $a_1 = -3$, $b_1 = \frac{2p}{7}$ $c_1 = 2$ तथा $a_2 = -\frac{3p}{7}$, $b_2 = 1$, $c_2 = -5$

चूँकि रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

$$(-3)\left(\frac{-3p}{7}\right) + \left(\frac{2p}{7}\right) \times 1 + 2 \times (-5) = 0$$

या $$\frac{9p}{7} + \frac{2p}{7} - 10 = 0$$

या $$\frac{11p}{7} - 10 = 0$$

या $$p = 10 \times \frac{7}{11} = \frac{70}{11}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 13. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब हैं।

हल : दी गयी पहली रेखा $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ के दिक्-अनुपात $= 7, -5, 1$

तथा दी गयी दूसरी रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के दिक्-अनुपात $= 1, 2, 3$

अब मान लीजिए $a_1 = 7$, $b_1 = -5$, $c_1 = 1$ तथा $a_2 = 1$, $b_2 = 2$, $c_2 = 3$

दोनों रेखाओं के परस्पर लम्ब होने के लिए, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

बायाँ पक्ष : $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

$$= 7 \times 1 + (-5) \times 2 + 1 \times 3$$
$$= 7 - 10 + 3 = 0 = \text{दायाँ पक्ष}$$

अत: दी हुई दोनों रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं। इति सिद्धम्।

i žu 14. रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

इसकी तुलना $\vec{r} = a_1 + \lambda \vec{b}_1$ से करने पर,

$$\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k} \text{ तथा } \vec{b_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

तथा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

इसकी तुलना $\vec{r} = a_2 + \lambda b_2$ से करने पर,

$$\vec{a_2} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \text{ तथा } \vec{b_2} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{a_2} - \vec{a_1} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$
$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

तथा
$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (-2-1)\hat{i} - (2-2)\hat{j} + (1+2)\hat{k} = -3\hat{i} + 3\hat{k}$$

अत:
$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{-3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

रेखाओं $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$ की बीच न्यूनतम दूरी, d

$$= \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|(\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$
$$= \left| \frac{(\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}).(-3\hat{i} + 3\hat{k}}{3\sqrt{2}} \right|$$
$$= \left| \frac{1 \times (-3) + (-3) \times 0 + (-2) \times 3}{3\sqrt{2}} \right|$$
$$= \left| \frac{-3 - 0 - 6}{3\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{-9}{3\sqrt{2}} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

उत्तर

प्रश्न 15. रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दी गयी रेखाएँ हैं :

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$$

और
$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$$

उपरोक्त रेखाओं की तुलना $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$

और $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ से करने पर,

$x_1=-1, y_1=-1, z_1=-1$ तथा $x_2=3, y_2=5, z_2=7$

और $a_1=7, b_1=-6, c_1=1$ तथा $a_2=1, b_2=-2, c_2=1$

$$\therefore \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+1 & 5+1 & 7+1 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-6+2)-6(7-1)+8(-14+6)$$
$$= -16-36-64 = -52-64 = -116$$

तथा $\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

$$= \sqrt{(-6+2)^2+(1+7)^2+(-14+6)^2}$$

$$= \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

दो रेखाओं के बीच की दूरी,
$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

$$= \left|\frac{-116}{\sqrt{116}}\right| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}.$$

उत्तर

प्रश्न 16. रेखाएँ जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$$

और
$$\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$$

हल : दी गयी रेखाएँ हैं :

$$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$$

और
$$\vec{r} = (4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$$

इनकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ से करने पर,

$$\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b_1} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a_2} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k},\ \vec{b_2} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

तथा

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) \times (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-6)\hat{i} - (1-4)\hat{j} + (3+6)\hat{k}$$

$$= -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$$

$\therefore$

$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{81+9+81}$$

$$= \sqrt{171} = 3\sqrt{19}$$

रेखा $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ के बीच न्यूनतम दूरी

$$d = \left|\frac{(a_2 - a_1).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|}\right|$$

$$= \left|\frac{(3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}).(-9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k})}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$= \left|\frac{3.(-9) + 3 \times 3 + 3 \times 9}{3\sqrt{19}}\right| = \left|\frac{-27 + 9 + 27}{3\sqrt{19}}\right|$$

$$= \frac{9}{3\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{19}}.$$ उत्तर

प्रश्न 17. रेखाएँ जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

और

$$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$$

हल : दी गयी पहली रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$$

$$= \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} + t(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

इसकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ से करने पर

$$\vec{a_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \text{ तथा } \vec{b_1} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

और $\quad \vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$

$$= \hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + s(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

इसकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu\vec{b_2}$ से करने पर

$$\vec{a_2} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}, \quad \vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

अब $\quad \vec{a_2} - \vec{a_1} = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{j} - 4\hat{k}$

तथा $\quad \vec{b_1} \times \vec{b_2} = (-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2+4)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$\therefore \quad |\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{4 + (-4)^2 + (-3)^2}$

$$= \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

दो रेखाओं के बीच की दूरी

$$d = \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_2} \times \vec{b_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

$$= \left| \frac{(\hat{j} - 4\hat{k}).(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{29}} \right|$$

$$= \left| \frac{0 \times 2 + 1 \times -4 + (-4)(-3)}{\sqrt{29}} \right|$$

$$= \left| \frac{-4+12}{\sqrt{29}} \right| = \frac{8}{\sqrt{29}}.$$

उत्तर

प्रश्नावली 11.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में समतल के अभिलम्ब की दिक्-कोसाइन और मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए :

(a) $z = 2$, **(b)** $x + y + z = 1$

(c) $2x + 3y - z = 5$ **(d)** $5y + 8 = 0$

हल : (a) चूँकि समतल $z = 2$ का अभिलम्ब z-अक्ष है इसलिए इसके दिक्-अनुपात 0, 0, 1 हैं।

अत: इसके दिक्-कोसाइन cos 90°, cos 90°, cos 0° हैं अर्थात् 0, 0, 1 हैं।

यहाँ $x = 0$ तथा $y = 0$ हैं।

स्पष्टतया $z = 2$ की मूल बिन्दु से दूरी = 2. उत्तर

(b) समतल $x + y + z = 1$ के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 1, 1, 1 हैं।

$\therefore$ समतल के अभिलम्ब की दिक्-कोसाइन

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

दिया गया समतल का समीकरण $x + y - z = 1$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

और यह $lx + my + nz = d$ के रूप में हैं, जब मूल बिन्दु से समतल का दूरी d है।

अतः मूल बिन्दु से समतल की दूरी $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$. उत्तर

(c) दिया गया समतल का समीकरण $2x + 3y - z = 5$

समतल के अभिलम्ब के दिक्-अनुपात 2, 3, –1 हैं।

$$\because \quad \sqrt{2^2+(3)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$\therefore$ समतल के अभिलम्ब के दिक्-कोसाइन $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}$. उत्तर

पुनः $\quad 2x + 3y - z = 5$

दोनों पक्षों में $\frac{1}{\sqrt{14}}$ से गुणा करने पर

$$\frac{2}{\sqrt{14}}x+\frac{3}{\sqrt{14}}y-\frac{1}{\sqrt{14}}z = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

अतः मूल बिन्दु से समतल की दूरी, $d = \frac{5}{\sqrt{14}}$. उत्तर

(d) समतल का समीकरण,

$$5y + 8 = 0$$

या $\quad 0.x + 5y + 0.z = -8$

इसके अभिलम्ब के दिक् अनुपात = 0, 5, 0 या 0, 1, 0

$\therefore \quad$ इसके दिक् कोसाइन = cos 90°, cos 0, cos 90° = 0, 1, 0. उत्तर

$\because \quad 0x + 5y + 0z = -8$

या $\quad 0 . x + y + 0 . z = -\frac{8}{5}$

अर्थात् $\quad \vec{r} . \vec{j} = -\frac{8}{5}$

या $\quad \vec{r}(-\hat{j}) = \frac{8}{5}$ $\quad$ [यहाँ $\hat{\vec{n}} = -\vec{j}$]

अतः मूल बिन्दु से समतल की दूरी $= \left|\frac{-8}{5}\right| = \frac{8}{5}$. उत्तर

प्रश्न 2. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से 7 मात्रक दूरी पर है और सदिश $3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}$ पर अभिलम्ब हैं।

हल : सदिश $3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$= \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{3^2+5^2+(-6)^2}} = \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{9+25+36}}$$

$$= \frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{70}}$$

$\therefore$ समतल का सदिश समीकरण

$$\vec{r}\,.\,\vec{n} = d \text{ जबकि } d = 7 \text{ इकाई}$$

या $$\vec{r}\,.\left(\frac{3\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7.$$ उत्तर

प्रश्न 3. निम्नलिखित समीकरणों का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए :

(a) $\vec{r}\,.(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) = 2$

(b) $\vec{r}\,.(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}) = 1$

(c) $\vec{r}\,.\left[(s-2t)\hat{i}+(3-t)\hat{j}+(2s+t)\hat{k}\right]$

हल : **(a)** दिया गया समीकरण $\vec{r}\,.(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) = 2$

इसमें $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ रखने पर

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}).(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) = 2$$

या $$x\,.\,1+y\,.\,1+z\,(-1) = 2$$

अतः समतल का कार्तीय समीकरण

$$x+y-z = 2.$$ उत्तर

(b) दिया गया समीकरण $\vec{r}\,.(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}) = 1$

इसमें $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ रखने पर

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}).(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}) = 1$$

या $$x\,.\,2+y\,.\,3+z\,.\,(-4) = 1$$

अतः समतल का कार्तीय समीकरण

$$2x+3y-4z = 1.$$ उत्तर

(c) दिया गया समीकरण $\vec{r}\,.\left[(s-2t)\hat{i}+(3-t)\hat{j}+(2s+t)\hat{k}\right] = 15$

इसमें $\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ रखने पर

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\,.\left[(s-2t)\hat{i}+(3-t)\hat{j}+(2s+t)\hat{k}\right] = 15$$

या $\qquad x \,.\, (s - 2t) + y(3 - t) + z(2s + t) = 15$

अत: समतल का कार्तीय समीकरण

$(s - 2t)\,x + (3 - t)y + (2s + t) = 15.$ उत्तर

प्रश्न 4. निम्नलिखित स्थितियों में मूल बिन्दु से खींचे गए लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

(a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

(b) $3y + 4z - 6 = 0$

(c) $x + y + z = 1$

(d) $5y + 8 = 0$

हल : (a) दिया गया समीकरण $2x + 3y + 4z - 12 = 0$

दोनों पक्षों में $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$ से भाग करने पर

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{12}{\sqrt{29}}$$

यही समतल का अभिलम्ब रूप है।

अभिलम्ब के दिक्-कोसाइन, $l = \frac{2}{\sqrt{29}}, m = \frac{3}{\sqrt{29}}$ तथा $n = \frac{4}{\sqrt{29}}$

समतल की मूल बिन्दु से दूरी, $d = \frac{12}{\sqrt{29}}$

$\therefore$ मूल बिन्दु से समतल पर लम्ब के पाद के निर्देशांक

$$x = ld = \frac{12}{\sqrt{29}} \times \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{24}{29}$$

$$y = md = \frac{12}{\sqrt{29}} \times \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{36}{29}$$

$$z = nd = \frac{12}{\sqrt{29}} \times \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{48}{29}$$

अत: लम्ब के पाद के निर्देशांक $= \left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$. उत्तर

(b) समतल का समीकरण $3y + 4z - 6 = 0$

दोनों पक्षों में $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$ से भाग करने पर

$$\frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z = \frac{6}{5}$$

$\therefore$ समतल के लम्ब के दिक्-कोसाइन, $l = 0$, $m = \frac{3}{5}$ तथा $n = \frac{4}{5}$

और समतल की मूल बिन्दू से दूरी, $d = \frac{6}{5}$

$\therefore$ मूल बिन्दु से समतल पर लम्ब के पाद के निर्देशांक

$$x = ld = \frac{6}{5} \times 0 = 0$$

$$y = md = \frac{6}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{25}$$

$$z = nd = \frac{6}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

अतः समतल पर मूल बिन्दु से लम्ब के पाद के निर्देशांक $= \left(0, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}\right)$

उत्तर

(c) दिया गया समीकरण $x + y + z = 1$

दोनों पक्षों में $\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ से भाग करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} y + \frac{1}{\sqrt{3}} z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

मूल बिन्दु से समतल पर लम्ब के दिक्-कोसाइन, $l = \frac{1}{\sqrt{3}}, m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तथा $n = \frac{1}{\sqrt{3}}$

तथा मूल बिन्दु से दूरी, $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ मूल बिन्दु से समतल पर लम्ब के पाद के निर्देशांक

$$x = ld = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$y = md = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$z = nd = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

अतः लम्ब के पाद के निर्देशांक $= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

उत्तर

(d) दिया गया समीकरण $5y + 8 = 0$ या $y = -\frac{8}{5}$

$\therefore$ मूल बिन्दु से समतल के दिक्-कोसाइन, $l = 0, m = 1$ तथा $n = 0$

$\therefore$ मूल बिन्दु से दुरी, $d = -\frac{8}{5}$

$\therefore$ मूल बिन्दु से समतल पर लम्ब के पाद के निर्देशांक

$$x = ld = -\frac{8}{5} \times 0 = 0$$

$$y = md = -\frac{8}{5} \times 1 = -\frac{8}{5}$$

$$z = nd = -\frac{8}{5} \times 0 = 0$$

$\therefore$ समतल पर लम्ब के पाद के निर्देशांक $\left(0, \frac{8}{5}, 0\right)$.

उत्तर

प्रश्न 5. निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समतलों का सदिश एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(a) बिन्दु (1, 0, –2) से जाता हो और $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ समतल पर अभिलम्ब है।

(a) बिन्दु (1, 4, 6) से जाता हो और $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ समतल पर अभिलम्ब सदिश है।

हल : (a) सदिश समीकरण
सदिश रूप में समीकरण

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n} = 0$$

यहाँ $\vec{a} = (1, 0, -2) = \hat{i} - 2\hat{k}$

तथा $\vec{n} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

∴ समतल का समीकरण

$$[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})].(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0.$$ उत्तर

कार्तीय समीकरण

समतल का समीकरण जो (x_1, y_1, z_1) से गुजरता है और लम्ब के दिक्-अनुपात $a, b, c,$ हैं।

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

यहाँ समतल बिन्दु (1, 0, – 2) से गुजरता है और लम्ब के दिक्-अनुपात (1, 1, –1) हैं।

अर्थात् $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = -2$ और $a = 1, b = 1, c = -1$

∴ समतल का समीकरण

$$1.(x - 1) + 1.(y - 0) + (-1)(z + 2) = 0$$

या $x - 1 + y - z - 2 = 0$

या $x + y - z = 3.$ उत्तर

(b) सदिश समीकरण

समतल बिन्दु (1, 4, 6) से होकर जाता है तथा लम्ब सदिश $\hat{i} - \hat{j}2 + \hat{k}$ के अनुदिश है।

अर्थात् $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{n} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

∴ समतल का समीकरण

$$(\vec{r} - \vec{a}).\vec{n} = 0$$

या $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})].(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = 0.$ उत्तर

कार्तीय समीकरण

समतल बिन्दु (1, 4, 6) से होकर जाता है।

समतल पर लम्ब के दिक्-अनुपात 1, – 2, 1 हैं।

अर्थात् $x_1, = 1, y_1 = 4, z_1 = 6$ तथा $a = 1, b = -2, c = 1$

∴ समतल का समीकरण

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$1.(x - 1) - 2(y - 4) + (z - 6) = 0$$

या $x - 2y + z - 1 + 8 - 6 = 0$

या $x - 2y + z + 1 = 0.$ उत्तर

प्रश्न 6. उन समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्नलिखित तीन बिन्दुओं से गुजरता है :

(a) (1, 1, – 1), (6, 4, – 5), (– 4, – 2, 3)

(b) (1, 1, 0), (1, 2, 1), (– 2, 2, – 1)

हल : (a) यदि a, b, c समतल के लम्ब के दिक्-अनुपात हैं तो $(x_1, y_1, z_1,)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

बिन्दु $A(1, 1, -1)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a(x-1) + b(y-1) + c(z+1) = 0$$

बिन्दु $B(6, 4, -5)$ इस समीकरण पर स्थित हों, तब

$$a.(6-1) + b(4-1) + c(-5+1) = 0$$

या $$5a + 3b - 4c = 0 \quad \text{....(i)}$$

और बिन्दु $(-4, -2, 3)$ भी इसी समीकरण पर स्थित हो, तब

$\therefore$ $$a(-4-1) + b(-2-1) + c(3+1) = 0$$

या $$-5a - 3b + 4c = 0$$

या $$5a + 3b - 4c = 0 \quad \text{....(ii)}$$

यहाँ समीकरण (i) और (ii) एक ही समीकरण हैं।

अत: a, b, c के अनन्त मूल हो सकते हैं जो इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं।

इसीलिए दिए हुए बिन्दु सरेख हैं और एक रेखा से गुजरने वाले अनन्त समतल हो सकते हैं। उत्तर

(b) मान लीजिए बिन्दु $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, 2, -1)$ हों, तब

बिन्दु A से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$a(x-1) + b(y-1) + c(z-0) = 0 \quad \text{....(i)}$$

अब बिन्दु $B(1, 2, 1)$ को समीकरण (i) में रखने पर,

$$a(1-1) + b(2-1) + c\,(1-0) = 0$$

या $$0.a + b + c = 0 \quad \text{....(ii)}$$

और बिन्दु $C(-2, 2, -1)$ समीकरण (i) में रखने पर,

$$a(-2-1) + b(2-1) + c(-1) = 0$$

या $$-3a + b - c = 0 \quad \text{....(iii)}$$

समीकरण (i), (ii), (iii) में से a, b, c को लुप्त करने से, समतल का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

या $$(x-1)(-2) - 3(y-1-z) = 0$$

या $$-2x + 2 - 3y + 3 + 3z = 0$$

या $$-2x - 3y + 3z + 5 = 0$$

या $$2x + 3y - 3z - 5 = 0$$

या $$2x + 3y - 3z = 5.$$ उत्तर

प्रश्न 7. समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा काटे गए अन्त:खण्डों का ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समतल का समीकरण

$$2x + y - z = 5$$

5 से दोनों पक्षों में भाग देने पर $$\frac{2}{5}x + \frac{y}{5} - \frac{z}{5} = 1$$

या $$\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-5} = 1$$

अर्थात् समतल द्वारा काटे गए अन्त:खण्ड $\frac{5}{2}, 5, -5$ हैं। उत्तर

प्रश्न 8. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अक्ष पर अन्तःखण्ड 3 और जो तल ZOX के समान्तर है।

हल : समतल ZOX के समान्तर तल का समीरकण, $y = a$

यह तल y-अक्ष पर अन्तःखण्ड 3 बनाता है अर्थात् $a = 3$

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण $y = 3$. उत्तर

प्रश्न 9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $3x - y + 2z - 4 = 0$ और $x + y + z - 2 = 0$ के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु (2, 2, 1) से होकर जाता है।

हल : दिए गए समतल $3x - y + 2z - 4 = 0$ और $x + y + z - 2 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाला समतल

$$3x - y + 2z - 4 + \lambda(x + y + z - 2) = 0 \qquad \text{....(i)}$$

यह समीकरण बिन्दु (2, 2, 1) से होकर जाता है।

$\therefore \quad 3 \times 2 - 2 + 2 \times 1 - 4 + \lambda(2 + 2 + 1 - 2) = 0$

या $\quad 6 - 2 + 2 - 4 + \lambda . 3 = 0$

या $\quad 2 + 3\lambda = 0$ या $\lambda = -\dfrac{2}{3}$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$3x - y + 2z - 4 - \frac{2}{3}(x + y + z - 2) = 0$$

या $\quad 3(3x - y + 2z - 4) - 2(x + y + z - 2) = 0$

या $\quad 9x - 3y + 6z - 12 - (2x + 2y + 2z - 4) = 0$

या $\quad 7x - 5y + 4z - 8 = 0$

यही अभीष्ट समतल का समीकरण है। उत्तर

प्रश्न 10. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r}.(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r}.(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ के प्रतिच्छेदन रेखा और (2, 1, 3) से होकर जाता है।

हल : दिए गए समतलों $\vec{r}.(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r}.(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर गुजरने वाला समीकरण

$$\vec{r}.(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 7 + \lambda\vec{r}.(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - 9 = 0 \qquad \text{....(i)}$$

यह समीकरण बिन्दु (2, 1, 3) अर्थात् $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ से होकर जाता है।

$$\therefore \quad (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 7$$
$$+\lambda[(2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}).(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - 9] = 0$$

या $\quad (4 + 2 - 9) - 7 + \lambda[(4 + 5 + 9) - 9] = 0$

$\therefore \quad -10 + 9\lambda = 0$ या $\lambda = \dfrac{10}{9}$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\vec{r}.(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - 7 + \frac{10}{9}\{\vec{r}.(2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - 9\} = 0$$

या $9[\vec{r}.(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})-7]+10[\vec{r}.(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})-9] = 0$

$$\vec{r}.[9(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+10(2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k})]-63-90 = 0$$

या $\vec{r}.[(18+20)\hat{i}+(18+50)\hat{j}+(-27+30)\hat{k}]-153 = 0$

अत: अभीष्ट समतल का समीकरण

$$\vec{r}.(38\hat{i}+68\hat{j}+3\hat{k})-153 = 0$$

या $\vec{r}.(38\hat{i}+68\hat{j}+3\hat{k}) = 153.$ उत्तर

प्रश्न 11. तलों $x+y+z=1$ और $2x+3y+4z=5$ के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा तल $x-y+z=0$ पर लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समतलों $x+y+z=1$ और $2x+3y+4z=5$ के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$(x+y+z-1)+\lambda(2x+3y+4z-5) = 0$$

या $(1+2\lambda)x+(1+3\lambda)y+(1+4\lambda)z-1-5\lambda = 0$ ...(i)

यह तल $x-y+z=0$ के लम्बवत् है।

$\therefore$ $(1+2\lambda).1+(1+3\lambda).(-1)+(1+4\lambda).1 = 0$

$[\because a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0]$

या $1+2\lambda-1-3\lambda+1+4\lambda = 0$

या $1+3\lambda = 0$

$\therefore$ $\lambda = -\frac{1}{3}$

अत: अभीष्ट समतल का समीकरण $\lambda = -\frac{1}{3}$ समीकरण (i) में रखने पर,

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)x+\left(1-\frac{3}{3}\right)y+\left(1-\frac{4}{3}\right)z-1+\frac{5}{3} = 0$$

या $\frac{1}{3}x+0.y-\frac{1}{3}z+\frac{2}{3} = 0$

या $x-z+2 = 0.$ उत्तर

प्रश्न 12. समतलों जिनके सदिश समीकरण $\vec{r}.(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ और $\vec{r}.(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$ हैं, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए सदिश समीकरण हैं : $\vec{r}.(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=5$ और $\vec{r}.(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})=3$

इनकी तुलना समतलों $\vec{r}.\vec{n_1}=d_1$ और $\vec{r}.\vec{n_2}=d_2$ से करने पर,

$$\vec{n_1} = 2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k} \text{ तथा } \vec{n_2} = 3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$$

अत: दोनों समतलों के मध्य कोण,

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n_1}.\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}\right|$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \left|\frac{(2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}).(3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k})}{|2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}||3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}|}\right|$$

$$= \left|\frac{2.3+2(-3)+(-3).5}{\sqrt{4+4+9}.\sqrt{9+9+25}}\right|$$

$$= \left|\frac{6-6-15}{\sqrt{17}\sqrt{43}}\right| = \left|\frac{-15}{\sqrt{17}\sqrt{43}}\right|$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left|\left(\frac{-15}{\sqrt{17}\sqrt{43}}\right)\right|$$

$$= \cos^{-1}\left|\frac{15}{\sqrt{731}}\right|.$$

उत्तर

प्रश्न 13. निम्नलिखित प्रश्नों में ज्ञात कीजिए कि क्या दिए गए समतलों के युग्म समान्तर हैं अथवा लम्बवत् हैं और उस स्थिति में, जब ये न तो समान्तर हैं और न ही लम्बवत् तो उनके बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

(a) $7x+5y+6z+30=0$ और $3x-y-10z+4=0$

(b) $2x+y+3z-2=0$ और $x-2y+5=0$

(c) $2x-2y+4z+5=0$ और $3x-3y+6z-1=0$

(d) $2x-y+3z-1=0$ और $2x-y+3z+3=0$

(e) $4x+8y+z-8=0$ और $y+z-4=0$

हल : चूँकि समतलों के समीकरण $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

और $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

समान्तर होंगे यदि $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

तथा लम्बवत् होंगे यदि $a_1.a_2+b_1.b_2+c_1.c_2=0$

(a) दिए गए समतल

$7x+5y+6z+30=0$ तथा $3x-y-10z+4=0$ हैं

यहाँ $a_1=7, b_1=5, c_1=6$

तथा $a_2=3, b_2=-1, c_2=-10$

तब $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{7}{3}, \dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{5}{-1}$ तथा $\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{6}{-10}$

$$\therefore \quad \frac{7}{3}\neq\frac{5}{-1}\neq\frac{6}{-10}$$

अतः यह समान्तर नहीं हैं।

अब $a_1.a_2+b_1.b_2+c_1.c_2 = 7\times3+5\times(-1)+6\times(-10)$

$= 21-5-60 \neq 0$

अत: ये समतल लम्बवत भी नहीं हैं।

अब दोनों समतलों के बीच कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \left|\frac{7\times3+5\times(-1)+6\times(-10)}{\sqrt{7^2+5^2+6^2}.\sqrt{3^2+(-1)^2+(-10)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{21-5-60}{\sqrt{49+25+36}\sqrt{9+1+100}}\right|$$

$$= \left|\frac{-44}{\sqrt{110}\sqrt{110}}\right| = \left|\frac{-44}{110}\right| = \left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{2}{5}$$

अत: $\cos\theta = \frac{2}{5}$ या $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$. **उत्तर**

(b) दिए गए समतल

$$2x + y + 3z - 2 = 0 \text{ तथा } x - 2y + 5 = 0$$

यहाँ $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 3$ तथा $a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 0$

तब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}$ तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{0}$

समतल समान्तर नहीं है क्योंकि $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{3}{0}$

अब $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 3 \times 0 = 2 - 2 = 0$

अत: दिए हुए समतल लम्बवत् हैं।

(c) दिए गए समतल

$$2x - 2y + 4z + 5 = 0 \text{ तथा } 3x - 3y + 6z - 1 = 0$$

यहाँ $a_1 = 2, b_1 = -2, c_1 = 4$ तथा $a_2 = 3, b_2 = -3, c_2 = 6$

अब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

अत: दिए हुए समतल समान्तर हैं क्योंकि $\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3} = \frac{4}{6}$. **उत्तर**

अब
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 2 \times 3 + (-2)(-3) + 4 \times 6$$
$$= 6 - 6 + 24 \neq 0$$

अत: दिए गए समतल लम्बवत् नहीं हैं।

(d) दिए गए समतल

$$2x - y + 3z - 1 = 0 \text{ तथा } 2x - y + 3z + 3 = 0$$

यहाँ $a_1 = 2, b_1 = -1, c_1 = 3$ तथा $a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = 3$

$\therefore$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-1}$ तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{3}$

समान्तर हैं क्योंकि $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{3}{3}$. **उत्तर**

अब $$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 2 \times 2 + (-1)(-1) + (3 \times 3)$$
$$= 4 + 1 + 9 = 14 \neq 0$$

अत: दिए गए समतल लम्बवत् नहीं हैं।

(e) दिए हुए समतल

$4x + 8y + z - 8 = 0$ और $y + z - 4 = 0$

यहाँ $a_1 = 4, b_1 = 8, c_1 = 1$ तथा $a_2 = 0, b_2 = 1, c_2 = 1$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{0}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{8}{1} \text{ तथा } \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{1}$$

यह समतल समान्तर नहीं है क्योंकि $\frac{4}{0} \neq \frac{8}{1} \neq \frac{1}{1}$. उत्तर

तथा $$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 4 \times 0 + 8 \times 1 + 1 \times 1$$
$$= 8 + 1 = 9 \neq 0$$

अत: दिए हुए समतल लम्बवत् हैं।

माना इनके बीच कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{4\times0+8\times1+1\times1}{\sqrt{4^2+8^2+1^2}.\sqrt{1^2+1^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{8+1}{\sqrt{16+64+1}\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{9}{\sqrt{81}\sqrt{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{9}{9\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$ उत्तर

प्रश्न 14. निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक दिए गए बिन्दु से दिए गए संगत समतलों की दूरी ज्ञात कीजिए :

	बिन्दु	समतल
(a)	**(0, 0, 0)**	$3x - 4y + 12z = 3$
(b)	**(3, –2, 1)**	$2x - y + 2z + 3 = 0$
(c)	**(2, 3, – 5)**	$x + 2y - 2z = 9$
(d)	**(–6, 0, 0)**	$2x - 3y + 6z - 2 = 0$

हल : बिन्दु (x_1, y_1, z_1) की समतल $ax + by + cz + d = 0$ से दूरी

$$= \left|\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

(a) बिन्दु (0, 0, 0) से समतल $3x - 4y + 12z - 3 = 0$ की दूरी

$$= \left|\frac{3\times0-4\times0+12\times0-3}{\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-3}{\sqrt{9+16+144}}\right| = \left|\frac{-3}{13}\right| = \frac{3}{13}$$ उत्तर

(b) बिन्दु (3, –2, 1) से समतल $2x - y + 2z + 3 = 0$ की दूरी

$$= \left|\frac{2\times3-(-2)+2\times1+3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{6+2+2+3}{\sqrt{4+1+4}}\right| = \frac{13}{3}.$$ उत्तर

(c) बिन्दु (2, 3, –5) से समतल $x + 2y - 2z - 9 = 0$ की दूरी

$$= \left|\frac{2+2\times3-2\times(-5)-9}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{2+6+10-9}{\sqrt{1+4+4}}\right| = \left|\frac{9}{\sqrt{9}}\right| = \frac{9}{3} = 3.$$ उत्तर

(d) बिन्दु (– 6, 0, 0) से समतल $2x - 3y + 6z - 2 = 0$ की दूरी

$$= \left|\frac{2\times-6-3\times0+6\times0-2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(6)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-12+0+0-2}{\sqrt{4+9+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{-14}{\sqrt{49}}\right| = \frac{14}{7} = 2.$$ उत्तर

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. दिखाइए कि मूल बिन्दु से (2, 1, 1) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (3, 5, –1) और (4, 3, –1) से निर्धारित रेखा पर लम्ब है।

हल : बिन्दु $A(2, 1, 1)$ और मूल बिन्दु $O(0, 0, 0)$ वाली रेखा AO के दिक्-अनुपात = 2 – 0, 1 – 0, 1 – 0 या 2, 1, 1

तथा बिन्दु C(3, 5, –1) और $D(4, 3, -1)$ से निर्धारित रेखा के दिक्-अनुपात = 4 – 3, 3 – 5, – 1 + 1 या 1 – 2, 0

AO और CD लम्ब होंगी यदि $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

अत: $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 0 = 2 - 2 = 0$

अत: AO और CD परस्पर लम्ब हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 2. यदि दो परस्पर रेखाओं की दिक्-कोसाइन l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हों तो दिखाइए कि इन दोनों पर लम्ब रेखा की दिक्-कोसाइन $m_1n_2 - m_2n_1, n_1l_2 - n_2l_1, l_1m_2 - l_2m_1$ हैं।

हल : माना दी गईं दो रेखाएँ AB और CD जिसके दिक्-कोसाइन क्रमशः l_1, m_1, n_1 और l_2, m_2, n_2 हों परस्पर लम्ब होती हैं। यदि

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$$

l_1, m_1, n_1, और l_2, m_2, n_2 दिक्-कोसाइन हैं तो

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$
$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

मान लीजिए PQ जो AB और CD दोनों पर लम्ब हैं और इसके दिक्-कोसाइन l, m, n हैं।

तो
$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$$
$$ll_2 + mm_2 + nn_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{m}{n_1l_2 - n_2l_1} = \frac{n}{l_1m_2 - l_2m_1}$$

या
$$\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}} \quad ....(i)$$

$[\because l^2 + m^2 + n^2 = 1]$

$$\because \quad (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2$$
$$= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2$$
$$= 1 \times 1 - 0 = 1$$

$[\because l^2 + m^2 + n^2 = 1, l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$ और $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0]$

ये मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{1}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{m}{n_1l_2 - n_2l_1} = \frac{n}{l_1m_2 - l_2m_1} = \frac{1}{1} = 1$$

अत: $l = m_1n_2 - m_2n_1$, $m = n_1l_2 - n_1l_1$, तथा $n = n_2l_2 - l_1m_1$

इति सिद्धम

प्रश्न 3. उन रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिए, जिनके दिक्-अनुपात a, b, c और $b-c, c-a, a-b$ हैं।

हल : मान लीजिए उन रेखाओं के बीच कोण θ है और दिए हुए दिक्-अनुपात a, b, c, और $b-c, c-a, a-b$ हैं तो

$$\cos\theta = \frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}$$
$$= 0$$

$$\therefore \quad \theta = 90° = \frac{\pi}{2}.$$

उत्तर

प्रश्न 4. x-अक्ष के समान्तर तथा मूल बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : x-अक्ष के दिक्-कोसाइन = 1, 0, 0

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट रेखा का समीकरण} = \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$$
$$= \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

उत्तर

प्रश्न 5. यदि बिन्दुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (– 4, 3, – 6) और (2, 9, 2) हैं तो AB और CD रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 7)$ को मिलाने वाली रेखा के दिक्-अनुपात = 4 – 1, 5 – 2, 7 – 3 या 3, 3, 4

तथा रेखा $C(-4, 3, -6)$ और $D(2, 9, 2)$ को मिलाने वाली रेखा CD के दिक्-अनुपात = 2 + 4, 9 – 3, 2 + 6 या 6, 6, 8 हैं।

AB तथा CD रेखाएँ समान्तर होगी।

यदि $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, =\frac{b_1}{b_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

AB और CD आपस में समान्तर हैं।

$\therefore$ इनके बीच का 0° हैं। **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्ब हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दी गयी पहली रेखा के दिक्-अनुपात = –3, $2k$, 2

तथा दूसरी रेखा के दिक्-अनुपात = $3k$, 1, – 5

रेखाओं के परस्पर लम्ब होने के लिए,

$$a_1 . a_2 + b_1 . b_2 + c_1 . c_2 = 0$$

$$(-3) \times 3k + (2k) \times 1 + 2\,(-5) = 0$$

$$-9k + 2k - 10 = 0$$

$$-7k - 10 = 0$$

$$\therefore \quad k = -\frac{10}{7}$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली रेखा तथा तल $\vec{r}.(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})+9=0$ पर लम्बवत् रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : समतल $\vec{r}.(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})+9=0$ के लम्ब के अनुदिश सदिश

$$= \hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$$

$\therefore$ उस रेखा का समीकरण जो (1, 2, 3) से होकर जाती है और सदिश $\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ के अनुदिश है।

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}).$$ **उत्तर**

प्रश्न 8. बिन्दु (a, b, c) से जाने वाले तथा तल $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ के समान्तर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : समतल $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2$ के समान्तर किसी भी समतल का समीकरण है

$$\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \lambda \qquad \text{..... (i)}$$

यह तल बिन्दु (a, b, c) से होकर जाता है

$$(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}).(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \lambda$$

$$\therefore \quad a + b + c = \lambda$$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\vec{r}.(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = a + b + c$$

या

$$x + y + z = a + b + c$$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है। **उत्तर**

प्रश्न 9. रेखाओं $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण हैं :

$$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

और

$$\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

इनकी तुलना $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$ से करने पर,

$$\vec{a_1} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \text{ तथा } \vec{b_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a_2} = -4\hat{i} - \hat{k} \text{ तथा } \vec{b_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

अब

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = -4\hat{i} - \hat{k} - (6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = -10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (4 + 4)\hat{i} + (6 + 2)\hat{j} + (-2 + 6)\hat{k}$$

$$= 8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$$

अतः

$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{8^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 64 + 16}$$

$$= \sqrt{144} = 12$$

$$\text{दोनों रेखाओं के मध्य दूरी} = \left| \frac{(\vec{a_2} - \vec{a_1}).(\vec{b_1} \times \vec{b_2})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

$$= \left| \frac{(-10\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})(8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})}{12} \right|$$

$$= \left| \frac{-10 \times 8 + 8(-2) + 4(-3)}{12} \right|$$

$$= \left| \frac{-80 - 16 - 12}{12} \right| = \left| \frac{-108}{12} \right| = 9.$$

उत्तर

प्रश्न 10. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दु (5, 1, 6) और (3, 4, 1) को मिलाने वाली रेखा YZ-तल को काटती है।

हल : बिन्दु (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(5, 1, 6) और (3, 4, 1) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-5}{3-5} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-6}{1-6}$$

या
$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-6}{-5}$$

या
$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-6}{5} = \lambda \text{ (मान लिया)}$$

इस रेखा पर किसी बिन्दु का निर्देशांक $(5+2\lambda, 1-3\lambda, 6+5\lambda)$ ....(i)

यह बिन्दु YZ-तल अर्थात् $x = 0$ पर स्थित है।

$$5 + 2\lambda = 0 \text{ या } \lambda = -\frac{5}{2}$$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$x = 0$$

$$y = 1 - 3\lambda = 1 - 3\left(-\frac{5}{2}\right) = 1 + \frac{15}{2} = \frac{17}{2}$$

तथा
$$z = 6 + 5\lambda = 6 + 5\left(-\frac{5}{2}\right) = 6 - \frac{25}{2} = -\frac{13}{2}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $\left(0, \frac{17}{2}, -\frac{13}{2}\right)$. उत्तर

प्रश्न 11. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं (5, 1, 6) और (3, 4, 1) को मिलाने वाली रेखा ZX-तल को काटती है।

हल : दिए गए बिन्दुओं (5, 1, 6) और (3, 4, 1) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है :

$$\frac{x-5}{3-5} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-6}{1-6}$$

या
$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-6}{-5}$$

या
$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-6}{5} = \lambda \text{ (मान लिया)}$$

इसी रेखा पर माना किसी बिन्दु P के निर्देशांक $(5+2\lambda, 1-3\lambda, 6+5\lambda)$

यह बिन्दु ZX-तल अर्थात् $y = 0$ पर स्थित है।

$$\therefore \quad 1 - 3\lambda = 0 \text{ या } \lambda = \frac{1}{3}$$

$$x = 5 + 2\lambda = 5 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

$$y = 0$$

तथा $$z = 6 + 5\lambda = 6 + 5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{18+5}{3} = \frac{23}{3}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ हैं। उत्तर

प्रश्न 12. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं (3, – 4, – 5) और (2, –3, 1) से गुजरने वाली रेखा, समतल $2x + y + z = 7$ के पार जाती है।

हल : दिए गए बिन्दुओं (3, – 4, – 5) और (2, –3, 1) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y+4}{-3+4} = \frac{z+5}{1+5}$$

या $$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} = \lambda \text{ (मान लिया)}$$

इसी रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(3 - \lambda, -4 + \lambda, -5 + 6\lambda)$

यह ज्ञात बिन्दु समतल $2x + y + z = 7$ पर स्थित है।

$$\therefore \quad 2(3 - \lambda) + (-4 + \lambda) + (-5 + 6\lambda) = 7$$

$$6 - 2\lambda - 4 + \lambda - 5 + 6\lambda = 7$$

$$5\lambda = 10$$

$$\therefore \quad \lambda = 2$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक

$$x = 3 - \lambda = 3 - 2 = 1$$
$$y = -4 + \lambda = -4 + 2 = -2$$
$$z = -5 + 6\lambda = -5 + 6 \times 2 = 7$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक (1, –2, 7) हैं। उत्तर

प्रश्न 13. बिन्दु (–1, 3, 2) से जाने वाले तथा समतलों $x + 2y + 3z = 5$ और $3x + 3y + z = 0$ में से प्रत्येक पर लम्ब समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए बिन्दु (–1, 3, 2) से जाने वाले समतल का समीकरण है

$$a(x + 1) + b(y - 3) + c(z - 2) = 0 \qquad \text{....(i)}$$

दिया गया समतल $x + 2y + 3z = 5$ पर लम्ब है

$$\therefore \quad a + 2b + 3c = 0 \qquad \text{....(ii)}$$

तथा समतल $3x + 3y + z = 0$ पर लम्ब है

$$\therefore \quad 3a + 3b + c = 0 \qquad \text{....(iii)}$$

समीकरण (ii) और (iii) से,

$$\frac{a}{2-9} = \frac{b}{9-1} = \frac{c}{3-6}$$

या $$\frac{a}{-7} = \frac{b}{8} = \frac{c}{-3}$$

या $$\frac{a}{7} = \frac{b}{-8} = \frac{c}{3} = \lambda \text{ (मान लिया)}$$

$$\therefore \quad a = 7\lambda, b = -8\lambda \text{ और } c = 3\lambda$$

$a, b, c,$ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$7\lambda(x+1) - 8\lambda(y-3) + 3\lambda(z-2) = 0$$

या $$7(x+1) - 8(y-3) + 3(z-2) = 0$$

या $$7x - 8y + 3z + 7 + 24 - 6 = 0$$

या $$7x - 8y + 3z + 25 = 0.$$ उत्तर

प्रश्न 14. यदि बिन्दु (1, 1, p) और (– 3, 0, 1) समतल $\vec{r}.(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ से समान दूरी पर स्थित हों तो p का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि बिन्दु $\vec{a}$ से समतल $\vec{r}.\vec{n} = d$ की दूरी

$$= \left|\frac{\vec{a_1}.\vec{n} = d}{|\vec{n}|}\right|$$

दिया है : $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + p\hat{k}$, $\vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}$, $d = -13$

$\therefore$ दिए गए बिन्दु से समतल की दूरी, $d_1 = \dfrac{\vec{a_1}(\vec{n_1}) - d}{\vec{n_r}}$

$$= \left|\frac{(\hat{i} + \hat{j} + p\hat{k}).(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13}{\sqrt{9 + 16 + 144}}\right|$$

$$= \left|\frac{(3 + 4 - 12p) + 13}{\sqrt{169}}\right| = \left|\frac{20 - 12p}{13}\right|$$

साथ ही बिन्दु (–3, 0, 1) से समतल $\vec{r}.(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ से दूरी,

$$d_2 = \left|\frac{(-3\hat{i} + \hat{k}).(3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}}\right| = \left|\frac{-9 - 12 + 13}{13}\right| = \frac{8}{13}$$

अब $$d_1 = d_2$$

$$\left|\frac{20 - 12p}{13}\right| = \pm\frac{8}{13}$$

$$20 - 12p = \pm 8$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर, $$20 - 12p = 8$$

$\therefore$ $$12p = 20 - 8 = 12 \text{ या } p = 1$$

तथा ऋणात्मक चिन्ह लेने पर, $$20 - 12p = -8,$$

$\therefore$ $$12p = 20 + 8 = 28$$

$\therefore$ $$p = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

अतः $$p = 1 \text{ या } \frac{7}{3}.$$ उत्तर

प्रश्न 15. समतलों $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = 1$ और $\vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$ के प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले तथा x-अक्ष के समान्तर तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समतलों के प्रतिच्छेदन से जाने वाले समतल का समीकरण

$$\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})-1+\lambda[\vec{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4] = 0$$

या $$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1-\lambda)\hat{k}]-1+4\lambda = 0 \quad ....(i)$$

$\because$ यहाँ तल, x-अक्ष के समान्तर है।

$\therefore$ x-अक्ष के दिक्-कोसाइन 1, 0, 0 हैं।

समतल का लम्ब सदिश $[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1-\lambda)\hat{k}]$ के अनुदिश है।

अत: $$1\,.\,(1+2\lambda)=0 \text{ या } \lambda = -\frac{1}{2}$$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\vec{r}.\left[\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)\hat{i}+\left(1-\frac{3}{2}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\hat{k}\right]-1-\frac{4}{2} = 0$$

या $$\vec{r}.\left(-\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{3}{2}\hat{k}\right)-3 = 0$$

या $$\vec{r}.(-\hat{j}+3\hat{k})-6 = 0$$

या $$\vec{r}.(\hat{j}-3\hat{k})+6 = 0 \text{ या } y-3z+6 = 0$$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है। उत्तर

प्रश्न 16. यदि O मूल बिन्दु तथा बिन्दु P के निर्देशांक (1, 2, – 3) हैं तो बिन्दु P से जाने वाले तथा OP के लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मूल बिन्दु तथा $P(1, 2, -3)$ से होकर जाने वाली वाली रेखा के दिक्-अनुपात $1-0, 2-0, -3-0$ या $1, 2, -3$ हैं।

और समतल $P(1, 2, -3)$ से होकर जाता है। अत: अभीष्ट समतल का समीकरण

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$$

$$1\,.(x-1)+2(y-2)-3(z+3) = 0$$

या $$x-1+2y-4-3z-9 = 0$$

या $$x+2y-3z-14 = 0.$$ उत्तर

प्रश्न 17. समतलों $\vec{r}.(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$, और $\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ के प्रतिच्छेदन रेखा को अन्तर्विष्ट करने वाले तथा तल $\vec{r}.(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ के लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समतल हैं : $$\vec{r}.(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4 = 0$$

और $$\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5 = 0$$

इनकी प्रतिच्छेदन रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण

$$\vec{r}.(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4+\lambda[\vec{r}.(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5] = 0$$

या $\quad \vec{r}.(1+2\lambda)\hat{i}+(2+\lambda)\hat{j}+(3-\lambda)\hat{k}]-4+5\lambda = 0$

जोकि समतल $\vec{r}.(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ के लम्बवत् है।

अर्थात् $\quad (1+2\lambda)\times 5+(2+\lambda)\times 3+(3-\lambda)\times(-6) = 0$

या $\quad 5+10\lambda+6+3\lambda-18+6\lambda = 0$

या $\quad 19\lambda - 7 =$ या $\lambda = \dfrac{7}{19}$

λ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\vec{r}.\left[\left(1+2.\frac{7}{19}\right)\hat{i}+\left(2+\frac{7}{19}\right)\hat{j}+\left(3-\frac{7}{19}\right)\hat{k}\right]-4+5\times\frac{7}{19} = 0$$

या $\quad \vec{r}.\left[\dfrac{33}{19}\hat{i}+\dfrac{45}{19}\hat{j}+\dfrac{50}{19}\hat{k}\right]-\dfrac{41}{19} = 0$

या $\quad \vec{r}.(33\hat{i}+45\hat{j}+50\hat{k})-41 = 0$

या $\quad 33x+45y+50z = 41$

यही अभीष्ट तल का समीकरण है। **उत्तर**

प्रश्न 18. बिन्दु (– 1, – 5, –10) से रेखा $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ और समतल $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा और समतल के समीकरण हैं :

$$\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}) \quad ....(i)$$

और $\quad \vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 5 \quad ....(ii)$

समीकरण (i) तथा (ii) को हल करने पर,

$$[2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})].(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) = 5$$

या $(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}).(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

$$+\lambda[(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}).(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})] = 5$$

या $\quad (2+1+2)+\lambda(3-4+2) = 5$

या $\quad 5+\lambda(1) = 5$ या $\lambda = 0$

λ का मान समी. (i) में रखने पर, $\quad \vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

दिया गया बिन्दु $(-1,-5,-10) = -\hat{i}-5\hat{j}-10\hat{k}$

इन बिन्दुओं के मध्य दूरी $= \sqrt{[2-(-1)]^2+(-1+5)^2+(2+10)^2}$

$$= \sqrt{3^2+4^2+12^2}$$
$$= \sqrt{9+16+144}$$
$$= 13.$$

उत्तर

प्रश्न 19. बिन्दु (1, 2, 3) से जाने वाली तथा समतलों $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ और $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}) \qquad ...(i)$$

रेखा समतल $\vec{r}.(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ के समान्तर है।
समतल का अभिलम्ब और रेखा (i) परस्पर लम्बवत् है।

$$\therefore \qquad a-b+2c=0 \qquad ...(ii)$$

इसी प्रकार रेखा (i) और समतल $\vec{r}.(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ समान्तर है।
⇒ रेखा (i) और समतल का अभिलम्ब परस्पर लम्बवत् है।

$$\Rightarrow \qquad 3a+b+c=0 \qquad ...(iii)$$

समीकरण (ii) और (iii) को हल करने पर,

$$\frac{a}{-1-2}=\frac{b}{6-1}=\frac{c}{1+3}$$

या

$$\frac{a}{-3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{4} \text{ या } \frac{a}{3}=\frac{b}{-5}=\frac{c}{-4}$$

a, b का c के मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$$
$$= \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(-3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}).$$

उत्तर

प्रश्न 20. बिन्दु (1, 2, –4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए अभीष्ट रेखा

$$\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}) \qquad ...(i)$$

रेखाओं के समीकरण हैं :

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$$

और $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})$ आपस में लम्ब हैं।
अतः इन रेखाओं के दिक्-अनुपात 3, –16, 7 और a, b, c हैं। ये रेखाएँ परस्पर लम्ब होंगी यदि

$$3a-16b+7c=0 \qquad ...(ii)$$

इसी प्रकार रेखा

$$\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$$

और $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})$ के दिक्-अनुपात 3, 8, –5 और a, b तथा c हैं। ये परस्पर लम्बवत् होंगी यदि

$$\therefore \qquad 3a-8b-5c=0 \qquad ...(iii)$$

समीकरण (ii) और (iii) को हल करने पर,

$$\frac{a}{80-56} = \frac{b}{21+15} = \frac{c}{24+48}$$

या
$$\frac{a}{24} = \frac{b}{36} = \frac{c}{72}$$

या
$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6}$$

a, b तथा c के मान समी. (i) में रखने पर

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}).$$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है। उत्तर

प्रश्न 21. यदि एक समतल के अन्तःखण्ड a, b, c हैं और इसकी मूल बिन्दु से दूरी p इकाई है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$.

हल : ऐसे समतल का समीकरण जिसके अन्तःखण्ड a, b, c हैं।

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$$

समतल की मूल बिन्दु से दूरी $= p$

अतः
$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}$$

या
$$p^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

या
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}.$$
इति सिद्धम्।

प्रश्न 22 और 23 में सही उत्तर का चुनाव कीजिए :

प्रश्न 22. दो समतलों $2x + 3y + 4z = 4$ और $4x + 6y + 8z = 12$ के बीच की दूरी है :

(A) 2 इकाई (B) 4 इकाई

(C) 8 इकाई (D) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई

हल : समतल के समीकरण,

$$2x + 3y + 4z = 4 \quad \text{...(i)}$$

और
$$4x + 6y + 8z = 12$$

या
$$2x + 3y + 4z = 6 \quad \text{...(ii)}$$

$\therefore$ समतल (i) तथा (ii) के बीच की दूरी

$$= \frac{6-4}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

अतः विकल्प (D) सही है। उत्तर

प्रश्न 23. **समतल $2x - y + 4z = 5$ और $5x - 2.5y + 10z = 6$ हैं–**

(A) परस्पर लम्ब (B) समान्तर

(C) y-अक्ष पर प्रतिच्छेदन करते हैं (D) बिन्दु $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$ से गुजरते हैं।

हल : समतल के समीकरण

$$2x - y + 4z = 5$$

और

$$5x - 2.5y + 10z = 6$$

उपरोक्त समीकरणों में x, y तथा z के गुणांकों की तुलना करने पर,

$$\frac{2}{5} = \frac{-1}{-2.5} = \frac{4}{10}$$

या

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

या

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

अर्थात् दोनों ही समतल समान्तर हैं।

अतः विकल्प (B) सही है। **उत्तर**