अध्याय-10

सदिश बीजगणित

(Vector Algebra)

(Important Formulae and Definitions)

1. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का अदिश गुणन जबकि उनके बीच कोण θ हो, तो

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta.$$

2. दो सदिशों के लम्ब होने का प्रतिबन्ध $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

3. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ लाम्बिक सदिश हों, तब

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = \hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

4. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का सदिश गुणन जबकि इनके बीच कोण θ हो

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \theta . \hat{n},$$

जहाँ $\hat{n}$ इकाई सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लम्ब सदिश है।

5. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ लाम्बिक सदिश हों, तब

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

6. यदि किसी त्रिभुज की दो आसन्न भुजाएँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हों, तब त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

7. यदि किसी चतुर्भुज के दो विकर्ण $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हों, तब

$$\text{चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

8. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी सदिश भुजाएँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं $= |\vec{a} \times \vec{b}|$.

9. बल $\vec{F}$ द्वारा किया गया कार्य, $W = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta = \vec{F}.\vec{d}$

10. बल $\vec{F}$ का आघूर्ण $= \vec{r} \times \vec{F}$

11. दो सदिशों का योग :

माना $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$, तब $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

12. स्थिति सदिश :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA},$$

जहाँ O मूलबिन्दु है।

13. विभाजन बिन्दु का स्थिति सदिश:

बिन्दु P का स्थिति सदिश जो रेखा AB को एक दिए हुए अनुपात $m : n$ में विभाजित करता हो

$$\vec{OP} = \frac{m.\vec{OB} + n.\vec{OA}}{m+n}$$

यदि P, AB का मध्य बिन्दु हो, तब

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

14. $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

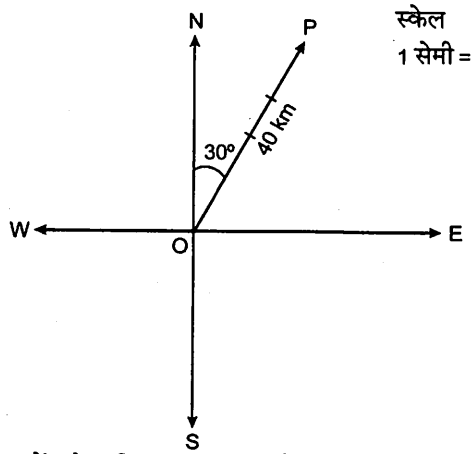
$$\text{एकक सदिश } \vec{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{|x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}|}$$

15. $\vec{r} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$$\text{दिक्-कोज्या } \cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

प्रश्नावली 10.1

प्रश्न 1. उत्तर से 30° पूर्व में 40 km के विस्थापन का आलेखीय निरूपण कीजिए।
हल :



प्रश्न 2. निम्नलिखित मापों को अदिश एवं सदिश के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए :

(i) 10 kg **(ii) 2 मीटर उत्तर-पश्चिम** **(iii) 40°**
(iv) 40 वाट **(v) 10^{-19} कूलम्ब** **(vi) 20 m/sec^2**

हल : अदिश : (i) 10 kg (iii) 40° (iv) 40 वाट (v) 10^{-19} कूलम्ब
सदिश : (ii) 2 मीटर उत्तर-पश्चिम (vi) 20 m/sec^2 **उत्तर**

प्रश्न 3. निम्नलिखित को अदिश एवं सदिश राशियों के रूप में श्रेणीबद्ध कीजिए :

(i) समय कालांश **(ii) दूरी** **(iii) बल**
(iv) वेग **(v) कार्य**

हल : अदिश राशि : (i) समय कालांश (ii) दूरी (v) कार्य
सदिश राशि : (iii) बल (iv) वेग। **उत्तर**

प्रश्न 4. आकृति (एक वर्ग) में निम्नलिखित सदिशों को पहचानिए :

(i) सह-आदिम **(iii) समान** **(iii) सरेख परन्तु असमान**

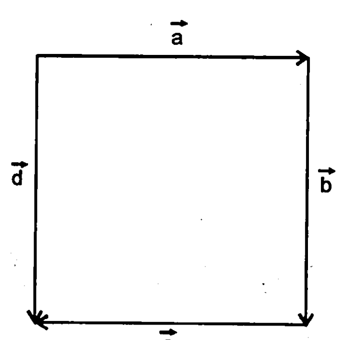
हल : (i) सह-आदिम सदिश :

$$\vec{AB} = \vec{a} \text{ तथा } \vec{BC} = \vec{b}$$

(ii) समान : $\vec{AD} = \vec{d}, \vec{BC} = \vec{b}$

(iii) सरेख परन्तु असमान :

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{CD} = \vec{c}$$



प्रश्न 5. निम्नलिखित का उत्तर सत्य अथवा असत्य के रूप में दीजिए :

(i) $\vec{a}$ और $-\vec{a}$ सरेख हैं।
(ii) दो सरेख सदिशों का परिमाण सदैव समान होता है।
(iii) समान परिमाण वाले दो सदिश सरेख होते हैं।
(iv) समान परिमाण वाले दो सरेख सदिश समान होते हैं।

हल : (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

प्रश्नावली 10.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित सदिशों के परिमाण का परिकलन कीजिए :

$$\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b} = 2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k},\ \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

हल : (i) दिया है : $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore$ $$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}.$$ **उत्तर**

(ii) दिया है : $\vec{b} = 2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}$

$\therefore$ $$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2} = \sqrt{2^2+(-7)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+49+9} = \sqrt{62}.$$ **उत्तर**

(iiii) दिया है : $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1.$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

हल : मान लीजिए सदिश $\vec{a} = 2\hat{i}+\vec{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i}+\vec{j}+2\hat{k}$ दो विभिन्न सदिश हों, तब उनके परिमाण :

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6} \text{ तथा } |\vec{b}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

इस प्रकार $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश हैं जिनके परिमाण समान हैं। **उत्तर**

प्रश्न 3. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

हल : मान लीजिए समान दिशा वाले दो सदिश $\vec{a} = \hat{i}+\vec{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}+3\vec{j}+3\hat{k}$ हैं।

$\vec{a}$ के दिक्-कोसाइन $= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\vec{b}$ के दिक्-कोसाइन $= \left(\frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}, \frac{3}{\sqrt{27}}\right)$ या $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| \neq |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \neq \vec{b}$$

अत: इस प्रकार $\vec{a}, \vec{b}$ एक ही दिशा में हैं परन्तु परिमाण विभिन्न हैं। उत्तर

प्रश्न 4. x और y के मान ज्ञात कीजिए ताकि सदिश $2\hat{i} + 3\hat{j}$ और $x\hat{i} + y\hat{j}$ समान हों।

हल : दिया है : $2\hat{i} + 3\hat{j} = x\hat{i} + y\hat{j}$

तब, $x = 2, y = 3.$ उत्तर

प्रश्न 5. एक सदिश का प्रारम्भिक बिन्दु (2, 1) है और अन्तिम बिन्दु (– 5, 7) है। इस सदिश के अदिश एवं सदिश घटक ज्ञात कीजिए।

हल : माना सदिश का प्रारम्भिक बिन्दु $A(2, 1)$ अर्थात् $x_1 = 2$ और $y_1 = 1$ तथा सदिश का अन्तिम बिन्दु $B(-5, 7)$ हो, तब

$$x_2 = -5, y_2 = 7$$

$$\therefore \quad \vec{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

$$= (-5-2)\hat{i} + (7-1)\hat{j} = -7\hat{i} + 6\hat{j}$$

अत: $\vec{AB}$ के अदिश घटक – 7 और 6 हैं।

और $\vec{AB}$ के सदिश घटक $-7\hat{i}$ और $6\hat{j}$ हैं। उत्तर

प्रश्न 6. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

तथा $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$

अत: $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (1-2+1)\hat{i} + (-2+4-6)\hat{j} + (1+5-7)\hat{k}$

$$= 0.\hat{i} + (-4)\hat{j} + (-1)\hat{k} = -4\hat{j} - \hat{k}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{a} = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}.$$ उत्तर

प्रश्न 8. सदिश $\overrightarrow{PQ}$, के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दु P और Q क्रमशः (1, 2, 3) और (4, 5, 6) हैं।

हल : P का स्थिति सदिश, $\overrightarrow{OP} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

तथा Q का स्थिति सदिश, $\overrightarrow{OQ} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}$ का स्थिति सदिश $= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$$= (4-1)\hat{i} + (5-2)\hat{j} + (6-3)\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

अत:
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 3^3 + 3^2}$$
$$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

मात्रक सदिश $\overrightarrow{PQ}$ जो $\overrightarrow{PQ}$ के अनुदिश है।

$$= \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

$$= \frac{3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}.$$

उत्तर

प्रश्न 9. दिए हुए सदिशों $\overrightarrow{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\overrightarrow{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के लिए सदिश $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\overrightarrow{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

तथा $\overrightarrow{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (2-1)\hat{i} + (-1+1)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$

$$= \hat{i} + 0.\hat{j} + \hat{k} = \hat{i} + \hat{k}$$

तथा $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

अत: $\vec{a}+\vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$= \frac{1}{|\vec{a}+\vec{b}|}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{k})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. सादिश $5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 8 इकाई है।

हल : मान लीजिए $\vec{a} = 5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{25+1+4} = \sqrt{30}$$

$\therefore$ $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $= \dfrac{8\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$= \frac{8(5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{30}}$$

$$= \frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}.$$ उत्तर

प्रश्न 11. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ और $-4\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ सरेख हैं।

हल : मान लीजिए $\vec{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

तथा $\vec{b} = -4\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$

$$= -2(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}) = -2\vec{a}$$

$\Rightarrow$ $\vec{b} = -2\vec{a}$

अत: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ सरेख हैं।

प्रश्न 12. सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्रानुसार,

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ तो

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}, \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

यहाँ $a_1 = 1\ a_2 = 2, a_3 = 3$

$\therefore$ $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\therefore$
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$\therefore$ अतः $\vec{a}$ के दिक् कोसाइन $= \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$. **उत्तर**

प्रश्न 13. बिन्दुओं $A(1, 2, -3)$ एवं $B(-1, -2, 1)$ को मिलाने वाले एवं A से B की तरफ दिष्ट सदिश की दिक् cosine ज्ञात कीजिए।

हल : A का स्थिति सदिश, $\vec{OA} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$

B का स्थिति सदिश, $\vec{OB} = -\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{AB}$ का स्थिति सदिश $= \vec{OB} - \vec{OA}$

$$= (-\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}) - (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$$

$$\vec{AB} = (-1-1)\hat{i} + (-2-2)\hat{j} + (1+3)\hat{k}$$

$$= -2\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

अब $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+4^2}$

$$= \sqrt{4+16+16} = 6$$

हम जानते हैं कि $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ के दिक् – कोसाइन $= \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}$

अतः $-2\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ के दिक्-कोसाइन $= \frac{-2}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{4}{6}$ अर्थात् $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 14. दर्शाइए कि सदिश $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ अक्षों OX, OY, OZ के साथ बराबर झुका हुआ है।

हल : चूँकि $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ के दिक्-कोसाइन

$\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_2}{|\vec{a}|}, \dfrac{a_3}{|\vec{a}|}$ हैं।

यहाँ पर ज्ञात है $\qquad \vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

इसलिए $\qquad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\therefore \qquad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}, \beta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}, \gamma = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

स्पष्टत: दिया हुआ सदिश *OX, OY, OZ* के साथ एक ही कोण बनाता है अर्थात् दिया हुआ सदिश निर्देशांक अक्षों के साथ बराबर झुका हुआ है।

प्रश्न 15. बिन्दुओं $P(i + 2\hat{j} - \hat{k})$ और $Q(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में
(i) अन्त:
(ii) बाह्य, विभाजित करने वाले बिन्दु *R* का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $\qquad \vec{OP} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

तथा $\qquad \vec{OQ} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

हम जानते हैं कि $\vec{OP}$ और $\vec{OQ}$ को अन्त: $m : n$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक =

$\dfrac{m\vec{OQ} + n\vec{OP}}{m+n}$ हैं, जहाँ $m : n = 2 : 1$ है।

$\therefore$ *PQ* को अन्त: 2 : 1 अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु

$$= \frac{2 \times (-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + 1\,(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{2+1}$$

$$= \frac{(-2+1)\hat{i} + (2+2)\hat{j} + (2-1)\hat{k}}{3}$$

$$= \frac{-\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}.$$ उत्तर

(ii) इसी प्रकार *PQ* को बाह्य 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करने वाला बिन्दु

$$= \frac{m\vec{OQ} - n\vec{OP}}{m-n}$$

$$= \frac{2(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})-1(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{2-1}$$

$$= \frac{(-2-1)\hat{i}+(2-2)\hat{j}+(2+1)\hat{k}}{1}$$

$$= -3\hat{i}+0.\hat{j}+3\hat{k} = -3\hat{i}+3\hat{k}.$$ उत्तर

प्रश्न 16. दो बिन्दुओं $P(2, 3, 4)$ और $Q(4, 1, -2)$ को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : P का स्थिति सदिश, $\overrightarrow{OP} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$

B का स्थिति सदिश, $\overrightarrow{OQ} = 4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

हम जानते हैं कि $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु $\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}$ होता है।

$\therefore$ $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु

$$= \frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+(4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})}{2}$$

$$= \frac{(2+4)\hat{i}+(3+1)\hat{j}+(4-2)\hat{k}}{2}$$

$$= \frac{6\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}}{2} = 3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}.$$ उत्तर

प्रश्न 17. दर्शाइए कि बिन्दु A, B और C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a} = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों के निर्माण करते हैं।

हल : दिए गए त्रिभुज के शीर्ष

$A(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$, $B(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और $C(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b}-\vec{a}$$

$$= (2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})-(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$$

$$= (2-3)\hat{i}+(-1+4)\hat{j}+(1+4)\hat{k}$$

$$= -\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

$$\therefore \quad AB^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = (-1)^2+3^2+5^2$$
$$= 1+9+25$$
$$= 35$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$
$$= (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$
$$= (1-2)\hat{i} + (-3+1)\hat{j} + (-5-1)\hat{k}$$
$$= -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$\therefore$ $$BC^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2$$
$$= 1 + 4 + 36 = 41$$

$$\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) - (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$$
$$= (3-1)\hat{i} + (-4+3)\hat{j} + (-4+5)\hat{k}$$
$$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$\therefore$ $$CA^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4 + 1 + 1 = 6$$

अब $$AB^2 + CA^2 = 35 + 6 = 41 = BC^2$$

या $$AB^2 + CA^2 = BC^2$$

अतः ΔABC एक समकोण त्रिभुज है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 18. त्रिभुज ABC के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही नहीं है?

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ (D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

हल : सदिशों के योगफल त्रिभुज के नियम से

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \text{ या } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$$

या $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

या $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

अतः विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 19. यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो संरेख संदिश हैं तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही नहीं है :

(A) $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, किसी अदिश λ के लिए

(B) $\vec{a} = \pm \vec{b}$

(C) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ क्रमागत घटक समानुपाती नहीं हैं।

(D) दोनों सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ की दिशा समान है परन्तु परिमाण विभिन्न हैं।

उत्तर : (D).

प्रश्नावली 10.3

प्रश्न 1. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ और 2 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच θ कोण हो, तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}||\vec{b}|}$$

यहाँ दिया है : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}, |\vec{a}| = \sqrt{3}$ तथा $|\vec{b}| = 2$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})(2)} = \frac{(\sqrt{3})(\sqrt{2})}{(\sqrt{3})(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

उत्तर

प्रश्न 2. सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $\vec{a} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

तथा $\vec{b} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

और माना $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच यदि θ कोण हो, तो

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}||\vec{b}|} = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}).(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{|\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}||3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}|}$$

$$= \frac{1.3 + (-2)(-2) + 3.1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{3 + 4 + 3}{\sqrt{1 + 4 + 9}.\sqrt{9 + 4 + 1}}$$

$$= \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

अतः $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right).$

उत्तर

प्रश्न 3. सदिश $\hat{i} + \hat{j}$ पर सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}, \vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$

$\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप

$$\therefore \qquad = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$= \frac{(\hat{i}-\hat{j}).(\hat{i}+\hat{j})}{|\hat{i}+\hat{j}|}$$

$$= \frac{1-1}{\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0.$$ उत्तर

प्रश्न 4. सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ का सदिश $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$

तथा $\vec{b} = 7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$

सदिश $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{(\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}).(7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})}{|7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}|}$

$$= \frac{1.7 + 3(-1) + 7.8}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{7 - 3 + 56}{\sqrt{49 + 1 + 64}}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{114}}.$$ उत्तर

प्रश्न 5. दर्शाइए कि दिए हुए निम्नलिखित तीन सदिशों में से प्रत्येक मात्रक सदिश है।

$$\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}), \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}), \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

यह भी दर्शाइए कि ये सदिश परस्पर एक-दूसरे के लम्बवत् हैं।

हल : मान लीजिए $\vec{a} = \frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}),\ \vec{b} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$

तथा $\vec{c} = \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

अब $|\vec{a}| = \frac{1}{7}\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \frac{1}{7}\sqrt{4 + 9 + 36}$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{49} = \frac{1}{7} \times 7 = 1$$

$$|\vec{b}| = \frac{1}{7}\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \frac{1}{7}\sqrt{9 + 36 + 4}$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{49} = \frac{1}{7} \times 7 = 1$$

तथा $$|\vec{c}| = \frac{1}{7}\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{36+4+9}$$

$$= \frac{1}{7}\sqrt{49} = \frac{1}{7}\times 7 = 1$$

चूँकि तीनों सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ का परिमाण 1 है।

∴ ये सदिश मात्रक सदिश हैं। **इति सिद्धम्।**

(ii) सदिश $\vec{a}$ सदिश $\vec{b}$ के लम्बवत् होगा यदि $\vec{a}.\vec{b} = 0$

अर्थात् $$\vec{a}.\vec{b} = \left[\frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}).\frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})\right]$$

$$= \frac{1}{49}[2(3)+(3)(-6)+(6)(2)]$$

$$= \frac{1}{49}(6-18+12) = 0$$

$$\vec{b}.\vec{c} = \frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}).\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$$

$$= \frac{1}{49}[(3)(6)+(-6)(2)+(2)(-3)]$$

$$= \frac{1}{49}(18-12-6) = 0$$

तथा $$\vec{c}.\vec{a} = \frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}).\frac{1}{7}(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$$

$$= \frac{1}{49}[(6)(2)+(2)(3)+(-3)(6)]$$

$$= \frac{1}{49}[12+6-18] = 0$$

∵ $\vec{a}.\vec{b}, \vec{b}.\vec{c}$ तथा $\vec{c}.\vec{a}$ में प्रत्येक का मान शून्य है।

∴ $$\vec{a}\perp\vec{b}, \vec{b}\perp\vec{c}, \vec{c}\perp\vec{a}$$

अत: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ परस्पर लम्बवत् हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 6. यदि $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = 8$ और $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ हो तो $|\vec{a}|$ एवं $|\vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b}) = 8$$

⇒ $$\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b} = 8$$

परन्तु $$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

∴ $$\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b} = 8$$

या $$\vec{a}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=8$$

या $$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=8$$

$\Rightarrow$ $$64|\vec{b}|^2-|\vec{b}|^2=8 \qquad [\because |\vec{a}|=8|\vec{b}|]$$

या $$63|\vec{b}|^2=8$$

$\therefore$ $$|\vec{b}|=\sqrt{\frac{8}{63}}=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}.$$ उत्तर

और $$|\vec{a}|=8|\vec{b}|$$

$$=8.\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}.$$ उत्तर

प्रश्न 7. $(3\vec{a}-5\vec{b}).(2\vec{a}+7\vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$(3\vec{a}-5\vec{b}).(2\vec{a}+7\vec{b})$

$$=(3\vec{a}).(2\vec{a})+(3\vec{a})\cdot(7\vec{b})+(-5\vec{b}).(2\vec{a})+(-5\vec{b}).(7\vec{b})$$

$$=6|\vec{a}|^2+21(\vec{a}.\vec{b})-10(\vec{b}.\vec{a})-35|\vec{b}|^2 \qquad [\because \vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}]$$

$$=6|\vec{a}|^2+21(\vec{a}.\vec{b})-10(\vec{a}.\vec{b})-35|\vec{b}|^2$$

$$=6|\vec{a}|^2+11\vec{a}.\vec{b}-35|\vec{b}|^2.$$ उत्तर

प्रश्न 8. दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि इनके परिमाण समान हैं और इनके बीच का कोण 60° है तथा इनका अदिश गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।

हल : दिया है : $\theta = 60°$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण यदि θ हो, तो

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad ...(i)$$

$$\therefore \qquad \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{|\vec{a}|^2} \text{ या } \frac{1}{2} = \frac{1}{2|\vec{a}|^2}$$

या $\qquad |\vec{a}|^2 = 1$ अर्थात् $|\vec{a}| = 1$

अतः $\qquad |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1.$ **उत्तर**

प्रश्न 9. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$ के लिए $(\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 12$ हो तो $|\vec{x}|$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\qquad (\vec{x} - \vec{a}).(\vec{x} + \vec{a}) = 12$

या $\qquad \vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{x} - \vec{a}.\vec{a} = 12$

या $\qquad |\vec{x}|^2 - |\vec{a}|^2 = 12 \qquad [\because \vec{x}.\vec{a} = \vec{a}.\vec{x}]$

या $\qquad |\vec{x}|^2 - 1 = 12 \qquad [\because |\vec{a}| = 1$ दिया है]

$$|\vec{x}|^2 = 13$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{13}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 10. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a} + \lambda\hat{b}$, $\vec{c}$ पर लम्ब है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\qquad \vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

तथा $\qquad \vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\therefore \qquad \vec{a} + \lambda\vec{b} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= (2 - \lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (3 + \lambda)\hat{k}$$

तथा दिया है कि $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ पर लम्ब है।

अर्थात् $\qquad \vec{a} + \lambda\vec{b} \perp \vec{c}$

या $\qquad (\vec{a} + \lambda\vec{b}).c = 0$

या $\qquad [(2 - \lambda)\hat{i} + (2 + 2\lambda)\hat{j} + (3 + \lambda)\hat{k}].[3\hat{i} + \hat{j}] = 0$

$\therefore \qquad 3(2 - \lambda) + (2 + 2\lambda).1 + (3 + \lambda).0 = 0$

$\therefore \qquad 6 - 3\lambda + 2 + 2\lambda = 0$

या $\qquad 8 - \lambda = 0$

$\therefore \qquad \lambda = 8.$ **उत्तर**

प्रश्न 11. दर्शाइए कि शून्येतर सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$, $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ पर लम्ब हैं।

हल : दिया है : $[|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}]$, $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}]$ पर लम्ब है।

यदि $[|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}].|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}=0$

बायाँ पक्ष $=|\vec{a}|\vec{b}\cdot|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{a}|\vec{b}|\vec{b}|.\vec{a}+|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\vec{b}\vec{a}-|\vec{b}|^2\vec{a}.\vec{a}$

$=|\vec{a}|^2\vec{b}.\vec{b}-|\vec{a}|\vec{b}|\vec{a}.\vec{b}+|\vec{a}||\vec{b}|$

$\vec{a}.\vec{b}-|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2$ $[\because \vec{b}.\vec{a}=\vec{a}.\vec{b}]$

$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=0.$

अत: दिए गए सदिश एक-दूसरे पर लम्ब हैं। इति सिद्धम्।

प्रश्न 12. यदि $\vec{a}.\vec{a}=0$ और $\vec{a}.\vec{b}=0$, तो सदिश $\vec{b}$ के बारे में क्या निष्कर्ष निकाला जा सकता है?

हल : दिया है : $\vec{a}.\vec{a}=0$ और $\vec{a}.\vec{b}=0$

$\vec{a}.\vec{a}=0$

$\therefore$ $|\vec{a}|^2=0$ या $|\vec{a}|=0$

$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$ $[\because |\vec{a}|=0]$

अत: $\vec{b}$ कोई भी सदिश हो सकता है। उत्तर

प्रश्न 13. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, तो $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ मात्रक सदिश हैं। (दिया है)

$\therefore$ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

अब $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

या $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ ...(i)

या $\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.(-\vec{c})$

या $\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}=-\vec{a}.\vec{c}$

या $|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{a}=0$ $[\because |\vec{a}|=1]$

या $$\vec{a}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{a}=-1 \quad ...(ii)$$

पुनः समीकरण (i) से,

$$\vec{b}.(\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}.(-\vec{c})$$

या $$\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=-\vec{b}.\vec{c}$$

$$\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}.\vec{c}=0 \quad [\because |\vec{b}|=1]$$

या $$\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=-1 \quad ...(iii)$$

पुनः समीकरण (i) से,

$$\vec{c}.(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}.(-\vec{c})$$

$$\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}=-\vec{c}.\vec{c}$$

$$\vec{c}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{c}+|\vec{c}|^2=0$$

या $$\vec{c}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{c}=-1 \quad ...(iv)$$

समीकरण (ii), (iii) और (iv) को जोड़ने पर

$$2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-3$$

$\Rightarrow$ $$\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=-\frac{3}{2}.$$ उत्तर

प्रश्न 14. यदि $\vec{a}=\vec{0}$ अथवा $\vec{b}=\vec{0}$ तब $\vec{a}.\vec{b}=0$ परन्तु विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है। एक उदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल : दिया है, जब $\vec{a}=0$ या $\vec{b}=0$ तब $\vec{a}.\vec{b}=0$ परन्तु यदि $\vec{a}.\vec{b}=0$ हो तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का शून्य होना सत्य नहीं है।

मान लीजिए $$\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+k, \vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2+5^2}=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$$
$$=1.1-2\times3+1\times5=1-6+5=0$$

अतः $\vec{a}.\vec{b}=0$ परन्तु $\vec{a}\neq 0, \vec{b}\neq 0.$

प्रश्न 15. यदि किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B, C क्रमशः (1, 2, 3), (– 1, 0, 0), (0, 1, 2) हैं तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए। [$\angle ABC$, सदिशों $\vec{BA}$ एवं $\vec{BC}$ के बीच का कोण है।]

हल : मान लीजिए O मूल बिन्दु हो तो

A का स्थिति सदिश, $\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, B का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OB} = -\hat{i}$,

तथा C का स्थिति सदिश, $\overrightarrow{OC} = \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \quad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \hat{i}$$

$$= 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+4+9}$$
$$= \sqrt{17}$$

तथा
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (\hat{j} + 2\hat{k}) - (-\hat{i})$$

$$= \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2}$$
$$= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

सदिश $\overrightarrow{BC}$ और $\overrightarrow{BA}$ के बीच कोण $\angle ABC$

$$\therefore \quad \cos ABC = \frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BA}|}$$

$$= \frac{(\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{6}.\sqrt{17}}$$

$$= \frac{2.1 + 2.1 + 3.2}{\sqrt{102}}$$

$$= \frac{2+2+6}{\sqrt{102}} = \frac{10}{\sqrt{102}} = \frac{10}{\sqrt{102}}$$

$$\Rightarrow \quad \angle ABC = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right).$$ उत्तर

प्रश्न 16. दर्शाइए कि बिन्दु $A(1, 2, 7)$, $B(2, 6, 3)$, $C(3, 10 - 1)$ सरेख हैं।

हल : दिए गए बिन्दुओं के स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k}, \ \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

तथा
$$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}$$

$$\because \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k})$$

$$= \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

तथा $$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$= (3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}) - (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= \hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

इसी प्रकार $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (3\hat{i} + 10\hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 7\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$= 2(\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k})$$

अर्थात् $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ और $\overrightarrow{AC}$ एक ही सदिश $\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ को निरूपित करते हैं।
अत: A, B, C सरेख हैं। **इति सिद्धम्।**

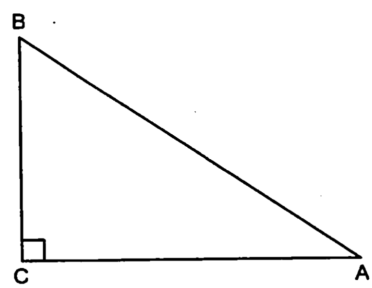
प्रश्न 17. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों की रचना करते हैं।

हल : मान लीजिए दिए हुए सदिशों $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ और $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ को क्रमश: A, B तथा C से व्यक्त करें, तब

A का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$,

B का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OB} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$

और C का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$



अब $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$= -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$= (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}) - (\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k})$$
$$= 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$
$$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$$
$$= -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$
$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

समकोण ΔABC के लिए जहाँ $\angle C = 90°$ हो, तब

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$
$$41 = 6 + 35 = 41.$$

अतः दिए गए सदिशों से एक समकोण त्रिभुज की रचना होती है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 18. यदि शून्येतर सदिश $\vec{a}$ का परिमाण 'a' है और λ एक शून्येतर अदिश है तो $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है यदि

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = \dfrac{1}{|\lambda|}$

हल : दिया है : $\vec{a}$ का परिमाण $= a$

अर्थात् $|\vec{a}| = a$

$\because$ $\lambda\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है,

$$|\lambda\vec{a}| = 1$$

$\Rightarrow$ $|\lambda| \cdot |\vec{a}| = 1$

$\Rightarrow$ $|\lambda| \cdot a = 1$

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{1}{|\lambda|}$

अतः विकल्प (D) सही है। **उत्तर**

प्रश्नावली 10.4

प्रश्न 1. यदि $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-14+14) - \hat{j}(2-21) + \hat{k}(-2+21) = 19\hat{j} + 19\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{19^2 + 19^2} = 19\sqrt{2}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - \vec{b}$ की लम्ब दिशा में मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ है।

हल : दिया है : $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= (3+1)\hat{i} + (2+2)\hat{j} + (2-2)\hat{k} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$$

तथा $$\vec{a} - \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= (3-1)\hat{i} + (2-2)\hat{j} + (2+2)\hat{k} = 2\hat{i} + 4\hat{k}$$

मान लीजिए $\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - \vec{b}$ की लम्ब दिशा में सदिश

$$\vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 16\hat{i} - 16\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(16)^2 + (-16)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{256 + 256 + 64}$$
$$= \sqrt{576} = \pm 24$$

$$\text{अभीष्ट मात्रक सदिश} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

$$= \pm\frac{16\hat{i} - 16\hat{j} - 8\hat{k}}{24}$$

$$= \pm\frac{8(2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})}{24}$$

$$= \pm\frac{2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}}{3} = \pm\frac{2}{3}\hat{i} \mp \frac{2}{3}\hat{j} \mp \frac{1}{3}\hat{k}.$$ उत्तर

प्रश्न 3. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}, \hat{i}$ के साथ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ के साथ $\frac{\pi}{4}$ और $\hat{k}$ के साथ एक न्यून कोण θ बनाता है तो θ का मान ज्ञात कीजिए और इसकी सहायता से $\vec{a}$ के घटक भी ज्ञात कीजिए।

हल : माना मात्रक सदिश $\vec{a}$; $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता है, तब दिया है :

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4} \text{ तथा } \gamma = \theta$$

$\because$ $$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$\therefore$ $$\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \theta = 1$$

या $$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \theta = 1$$

$\therefore$ $$\cos^2 \theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ $$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ अर्थात् } \theta = \frac{\pi}{3}$$

अब $$\vec{a} \text{ के घटक} = \cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{4} \text{ तथा } \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ तथा } \frac{1}{2}$$

अतः $\vec{a}$ के घटक $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$ तथा $\theta = \frac{\pi}{3}$. उत्तर

प्रश्न 4. दर्शाइए कि $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$.

हल : $$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}$$

$$= 0 + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - 0$$

$$[\because \vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0, \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}]$$

$$= 2(\vec{a} \times \vec{b}).$$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 5. λ और μ ज्ञात कीजिए यदि $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$.

हल : दिया है :

$$(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = 0$$

$$\therefore \qquad \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 6 & 27 \\ 1 & \lambda & \mu \end{vmatrix} = \vec{0}$$

या $\qquad (6\mu - 27\lambda)\hat{i} - (2\mu - 27)\hat{j} + (2\lambda - 6)\hat{k} = 0\cdot\hat{i} + 0\cdot\hat{j} + 0\cdot\hat{k}$

$\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के गुणांकों की दोनों पक्षों से तुलना करने पर,

$$2\mu - 27 = 0 \qquad\qquad 2\lambda - 6 = 0$$
$$2\mu = 27 \qquad\qquad 2\lambda = 6$$
$$\mu = \frac{27}{2} \qquad\qquad \lambda = \frac{6}{2} = 3$$

अत: $\lambda = 3, \mu = \frac{27}{2}$. **उत्तर**

प्रश्न 6. दिया हुआ है कि $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ और $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : दिया है : $\qquad \vec{a} . \vec{b} = 0$

अर्थात् $\vec{a} = 0$, हो, तब $\qquad \vec{b} = 0$ अर्थात् $\vec{a} \perp \vec{b}$ $\qquad$ ($\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ शून्येत्तर सदिश होंगे)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{a} = 0$, या $\qquad \vec{b} = 0$, अर्थात् $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $\qquad$ ($\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ शून्येत्तर सदिश होंगे)

लेकिन $\vec{a} \perp \vec{b}$ और $\vec{a} \parallel \vec{b}$ नहीं हो सकता।

अत: $\qquad \vec{a} = 0$ या $\vec{b} = 0$. **उत्तर**

प्रश्न 7. मान लीजिए सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ क्रमशः $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ के रूप में दिए हुए हैं तब दर्शाइए कि $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

हल : दिया है : $\qquad \vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \ \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k},$

तथा $\qquad \vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

$$\vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1)\hat{i} + (b_2 + c_2)\hat{j} + (b_3 + c_3)\hat{k}$$

बायाँ पक्ष $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$

$$= [a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)]\hat{i}$$
$$- \hat{j}[a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1)] + \hat{k}[a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)]$$

$$= [(a_2b_3 - a_3b_2) + (a_2c_3 - a_3c_2)]\hat{i} -$$
$$[(a_1b_3 - a_3b_1) + (a_1c_3 - a_3c_1)]\hat{j} + [(a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1c_2 - a_2c_1)]\hat{k}$$

$$= \left[(a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}\right]$$
$$+ \left[(a_2c_3 - a_3c_2)\hat{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\hat{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\hat{k}\right]$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

तथा $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= (a_2c_3 - a_3c_2)\hat{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\hat{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\hat{k}$$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$$= \left[(a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}\right]$$
$$+ \left[(a_2c_3 - a_3c_2)\hat{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\hat{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\hat{k}\right]$$

अत: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. इति सिद्धम्।

प्रश्न 8. यदि $\vec{a} = \vec{0}$ अथवा $\vec{b} = \vec{0}$ तब $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ होता है। क्या विलोम सत्य है। उदाहरण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल : यदि $\vec{a} = \vec{0}$ तब $|\vec{a}| = 0$ ...(i)

तथा $\vec{b} = \vec{0}$ तब $|\vec{b}| = 0$ ...(ii)

$\because \quad \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta . \vec{n}$

$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0$ [समीकरण (i) तथा (ii) से]

परन्तु, यदि $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, तो यह आवश्यक नहीं है कि $|\vec{a}| = 0$ या $|\vec{b}| = 0$

मान लीजिए $\quad \vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

जबकि $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \neq 0$

$$\vec{b} = p\vec{a} = (pa_1)\hat{i} + (pa_2)\hat{i} + (pa_3).\hat{k}$$

$$|p\vec{a}| = p\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \neq 0$$

परन्तु $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times [p\vec{a}] = p(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

अत: $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(1, 1, 2), B(2, 3, 5)$ और $C(1, 5, 5)$ हैं।

हल : मान लीजिए शीर्ष A का स्थिति सदिश, $\vec{OA} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

B का स्थिति सदिश, $\vec{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

तथा C का स्थिति सदिश, $\vec{OC} = \hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

अब त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(\vec{AB} \times \vec{AC})$

$$= \frac{1}{2}(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) \times (4\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(6-12)\hat{i} + (-3)\hat{j} + (4-0)\hat{k}$$

$$= \frac{1}{2}(-6\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$\therefore$ त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}|-6\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 4^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36+9+16} = \frac{1}{2}\sqrt{61}.$$ उत्तर

प्रश्न 10. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ द्वारा निर्धारित हैं।

हल : दी गयीं समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ

$$\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

तथा
$$\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$$

$\therefore$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1+21)\hat{i} - (1-6)\hat{j} + (-7+2)\hat{k}$$

$$= 20\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}| = |20\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k}|$

$$= \sqrt{20^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{400+25+25}$$

$$= \sqrt{450} = 15\sqrt{2}.$$ उत्तर

प्रश्न 11. मान लीजिए सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3$ और $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, तब $\vec{a} \times \vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है :

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

हल : $\because$
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta . n$$

या
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta$$

दिया है :
$$|\vec{a}| = 3 \text{ तथा } |\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

जबकि
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 1 \text{ इकाई}$$

$\therefore$
$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta = 1$$

$$3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} \sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$\therefore$ $$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

अतः विकल्प (B) सही है। **उत्तर**

प्रश्न 12. एक आयत के शीर्षों A, B, C और D जिसके स्थिति सदिश क्रमशः $-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $-\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ हैं, का क्षेत्रफल है :

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 4

हल : $$\vec{AB} = (\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}) - (-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}) = 2\hat{i}$$

$\therefore$ $$|\vec{AB}| = 2$$

अब $$\vec{AD} = (-\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}) - (-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}) = -\hat{j}$$

$\therefore$ $$|\vec{AD}| = 1$$

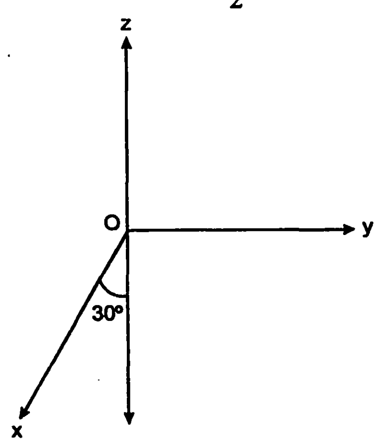
अतः आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल $= |\vec{AB}| \times |\vec{AD}|$
$= 2 \times 1 = 2$

अतः विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. XY-तल में x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ वामावर्त दिशा में 30° का कोण बनाने वाला मात्रक सदिश लिखिए।

हल : $\because$ $$x = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



तथा $$y = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

जब $\overrightarrow{OZ}$ के साथ 90° का कोण बनाता है।

$$\therefore \quad Z = \cos\ 90° = 0$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta + \hat{k}\times 0$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}.$$ उत्तर

प्रश्न 2. बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाले सदिश के अदिश घटक और परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ और $Q(x_2, y_2, z_2)$ के स्थिति सदिश क्रमश: हैं।

अत: $$\overrightarrow{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

तथा $$\overrightarrow{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

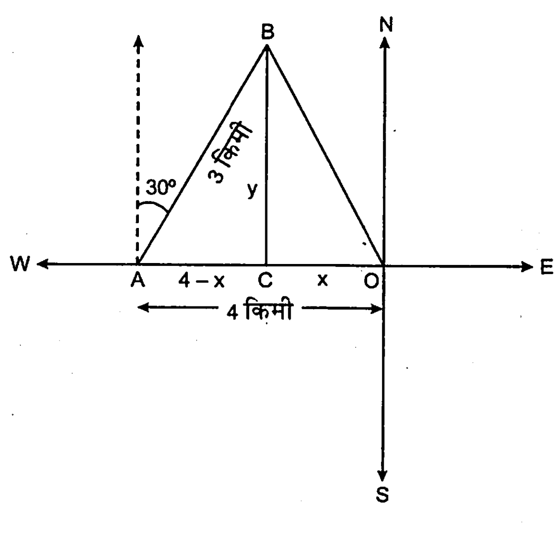
अत: $\overrightarrow{PQ}$ के अदिश घटक $= x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ उत्तर

तथा परिमाण $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$ उत्तर

प्रश्न 3. एक लड़की पश्चिम दिशा में 4 km चलती है। उसके पश्चात् वह उत्तर से 30° पश्चिम की दिशा में 3 km चलती है और रुक जाती है। प्रस्थान के प्रारम्भिक बिन्दु से लड़की का विस्थापन ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $$\vec{r} = \overrightarrow{OB}$$

अत: $$\vec{r} = -x\hat{i} + y\hat{j}$$



अब समकोण त्रिभुज ACB से

$$\sin 60° = \frac{y}{3} \text{ या } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3} \text{ या } y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

तथा $$\cos 60° = \frac{4-x}{3} \text{ या } \frac{1}{2} = \frac{4-x}{3} \text{ या } 3 = 8 - 2x$$

या $$2x = 8 - 3 = 5 \text{ या } x = \frac{5}{2}$$

अतः विस्थापन $$\vec{r} = -\frac{5}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}.$$ उत्तर

प्रश्न 4. यदि $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ तब क्या यह सत्य है कि $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

हल : दिया है : $$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

मान लीजिए $$|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$$

वर्ग करने पर $$|\vec{a}|^2 = |\vec{b} + \vec{c}|^2 = (\vec{b} + \vec{c})(\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \vec{b}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{c}$$

$$= |\vec{b}|^2 + 2(\vec{b}.\vec{c}) + |\vec{c}|^2$$

$$(\because \vec{c}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c},\ \vec{b}.\vec{b} = |\vec{b}|^2;\ \vec{c}.\vec{c} = |\vec{c}|^2)$$

$$= |\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta + |\vec{c}|^2$$

जब θ, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ बीच का कोण है।

(i) यदि $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + 2|\vec{b}||\vec{c}| + |\vec{c}|^2 = (|\vec{b}| + |\vec{c}|)^2$$

$\therefore$ $$|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$$

(ii) यदि $\theta \neq 0$, $\cos\theta \neq 1$

$$|\vec{a}|^2 \neq (|\vec{b}| + |\vec{c}|)^2$$

या $$|\vec{a}| \neq |\vec{b}| + |\vec{c}|$$

अतः यह आवश्यक नहीं है कि $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

प्रश्न 5. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $x(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ एक मात्रक सदिश है।

हल : मान लीजिए $$\vec{a} = x(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = x\hat{i} + x\hat{j} + x\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + x^2 + x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$$

मात्रक सदिश के लिए $|\vec{a}| = 1$

$\therefore$ $x\sqrt{3} = 1$ या $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$ **उत्तर**

प्रश्न 6. सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के परिणामी के समान्तर एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है।

हल : मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का परिणामी सदिश $\vec{c}$ है।

$$\therefore \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$$

$$\therefore \quad |\vec{c}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

दिया है : $|\vec{c}|$ के अनुदिश वह सदिश जिसका परिमाण 5 है।

$$= \frac{5\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{5.(3\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{5\sqrt{10}}{10}(3\hat{i} + \hat{j}) = \frac{3\sqrt{10}}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 7. यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तो सदिश $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ के समान्तर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\therefore \quad 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} = 2(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) + 3(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$|2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-3^2) + 2^2} = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$$

$\therefore$ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ के समान्तर मात्रक सदिश $= \dfrac{2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}}{|2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}|}$

$$= \frac{3\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{22}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i} - \frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j} + \frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}.$$ **उत्तर**

प्रश्न 8. दर्शाइए कि बिन्दु $A(1, -2, -8)$, $B(5, 0, -2)$ और $C(11, 3, 7)$ संरेख हैं और B द्वारा AC को विभाजित करने वाला अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बिन्दुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश

$$\vec{OA} = \hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k},\ \vec{OB} = 5\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}$$

तथा
$$\vec{OC} = 11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$$

$\therefore$
$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (5\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k})$$
$$= 4\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$$
$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$
$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) - (5\hat{i} + 0\hat{j} - 2\hat{k})$$
$$= 6\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$$
$$|\vec{BC}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 9 + 81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

तथा
$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (11\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k})$$
$$= 10\hat{i} + 5\hat{j} + 15\hat{k}$$
$$|\vec{AC}| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 15^2} = \sqrt{100 + 25 + 225} = \sqrt{350}$$
$$= 5\sqrt{14}$$

यहाँ
$$|\vec{AC}| = |\vec{AB}| + |\vec{BC}|$$

इसीलिए A, B, C संरेख हैं।

अब B सदिश द्वारा $\vec{AC}$ को विभाजित करने का अनुपात

$$= \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{BC}|} = \frac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{3} = 2 : 3.$$ **उत्तर**

प्रश्न 9. दो बिन्दुओं $P(2\vec{a} + \vec{b})$ और $Q(\vec{a} - 3\vec{b})$ को मिलाने वाली रेखा को 1 : 2 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि बिन्दु P रेखाखण्ड RQ का मध्य बिन्दु है।

हल : दिए गए बिन्दु P, Q के स्थिति सदिश क्रमश: $2\vec{a} + \vec{b}$ और $\vec{a} - 3\vec{b}$ हैं।
बिन्दु R के स्थिति सदिश जो PQ को बाह्य 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

$$= \frac{1.(\vec{a} - 3\vec{b}) - 2(2\vec{a} + \vec{b})}{1 - 2} = \frac{-3\vec{a} - 5\vec{b}}{-1} = 3\vec{a} + 5\vec{b}.$$ **उत्तर**

$\overrightarrow{RQ}$ के मध्य बिन्दु का स्थिति सदिश

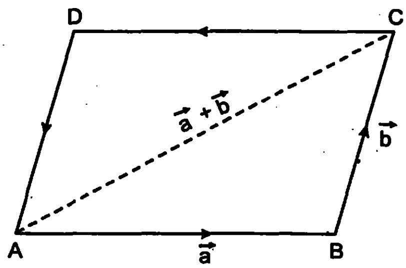
$$= \frac{(3\vec{a} + 5\vec{b}) + (\vec{a} - 3\vec{b})}{2} = \frac{4\vec{a} + 2\vec{b}}{2} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

जो P का स्थिति सदिश है।
अत: P, RQ का मध्य बिन्दु है। **उत्तर**

प्रश्न 10. एक समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ हैं। इसके विकर्ण के समान्तर एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए समान्तर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ क्रमश: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ हैं।

$$\therefore \quad \vec{a} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}, \quad \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k},$$



अत: $\vec{a}$ और $\vec{b}$ का विकर्ण $= \vec{a} + \vec{b}$

$$= (2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}|$$

$$= \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$\therefore$ $\vec{a} + \vec{b}$ के समान्तर मात्रक सदिश

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}}{7}$$

$$= \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{6}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k} = \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}).$$ **उत्तर**

अब समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

या
$$\vec{a} \times \vec{b} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (12+10)\hat{i} - (-6-5)\hat{j} + (-4+4)\hat{k}$$

$$= 22\hat{i} + 11\hat{j}$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$= |22\hat{i} + 11\hat{j}|$$

$$= \sqrt{22^2 + 11^2} = \sqrt{605}$$

$$= 11\sqrt{5}.$$ उत्तर

प्रश्न 11. दर्शाइए कि *OX, OY* एवं *OZ* अक्षों के साथ बराबर झुके हुए सदिश की दिक्-कोसाइन कोज्याएँ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं।

हल : माना कि सदिश $\vec{OP}$, OX, OY और OZ के साथ बराबर झुका हुआ है तथा प्रत्येक के साथ समान कोण α बनाता है।

$\therefore$ $\vec{OP}$ की दिक् कोज्याएँ $= \cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$

$\therefore$ $\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha$ दिक् कोज्याएँ हैं।

$\therefore \quad \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (\because l^2 + m^2 + n^2 = 1)$

$\therefore \quad 3\cos^2\alpha = 1$

या $\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अत: दी गयी अक्षों के साथ बराबर झुके हुए सदिश की दिक् कोज्याएँ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 12. मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ एक ऐसा सदिश $\vec{d}$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब है और $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$.

हल : दिया है : $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (28+4)\hat{i} + (6-7)\hat{j} + (-2-12)\hat{k}$$

$$= 32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k}$$

मान लीजिए $\vec{d} = \lambda(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k})$

$\therefore$ $\vec{d}$ सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लम्ब है।

परन्तु $\vec{c}.\vec{d} = 15$ (दिया है)

$\therefore$ $(2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}).(\lambda)(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k}) = 15$

या $\lambda(64 + 1 - 56) = 15$

या $9\lambda = 15$

$\therefore$ $\lambda = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

अत:
$$\vec{d} = \lambda(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k})$$
$$= \frac{5}{3}(32\hat{i} - \hat{j} - 14\hat{k})$$
$$= \frac{160}{3}\hat{i} - \frac{5}{3}\hat{j} - \frac{70}{3}\hat{k}$$
$$\vec{d} = \frac{1}{3}(160\hat{i} - 5\hat{j} - 70\hat{k})$$
उत्तर

प्रश्न 13. सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का, सदिशों $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल की दिशा में मात्रक सदिश के साथ अदिश गुणनफल 1 के बराबर है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$

तथा $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

सदिशों $\vec{b}$ और $\vec{c}$ का योगफल,
$$\vec{b} + \vec{c} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$
$$= (2 + \lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(2+\lambda)^2 + 36 + 4}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 4 + 36 + 4}$$
$$= \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}$$

$\vec{b} + \vec{c}$ के अनुदिश मात्रक सदिश $= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{|\vec{b} + \vec{c}|}$

$$= \frac{(2+\lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}} \text{ (मान लिया)}$$

$\vec{a}$ और $\vec{d}$ का अदिश गुणनफल $= 1$

$\Rightarrow \quad (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) . \dfrac{(2+\lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}} = 1$

या $\quad \dfrac{2 + \lambda + 6 - 2}{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}} = 1$

$$\lambda + 6 = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 44}$$

या $\quad (\lambda + 6)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 44$

या $\quad \lambda^2 + 12\lambda + 36 = \lambda^2 + 4\lambda + 44$

$\Rightarrow \quad 8\lambda = 44 - 36 = 8$

$\therefore \quad \lambda = 1.$ उत्तर

प्रश्न 14. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समान परिमाणों वाले परस्पर लम्बवत् सदिश हैं तो दर्शाइए कि सदिश $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ बराबर झुका हुआ है।

हल : दिया है कि सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

तब $\quad \vec{a} . \vec{b} = \vec{b} . \vec{c} = \vec{c} . \vec{a} = 0$

मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ के बीच में θ कोण बनता है तथा

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \lambda \text{ (दिया है)}$$

$\therefore \quad \vec{a} . (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| . |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \cos\theta$

या $\quad \vec{a} . \vec{a} + \vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c} = |\vec{a}| . |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \cos\theta$

या $\quad |\vec{a}|^2 + 0 + 0 = |\vec{a}| \, |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \cos\theta \quad [\because \vec{a} . \vec{b} = \vec{a} . \vec{c} = 0]$

या $\quad \lambda^2 = \lambda |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \cos\theta$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{\lambda}{|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|}$

इसी प्रकार सदिश $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{c}$ के साथ भी यही कोण बनाता है।

अत: यह कहा जा सकता है कि सदिश $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, सदिश $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ के साथ बराबर झुका हुआ है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ यदि और केवल यदि $\vec{a}, \vec{b}$ लम्बवत् हैं। यह दिया हुआ है कि $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

हल : ∵ $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2$ $\qquad (\because \vec{b}.\vec{a}=\vec{a}.\vec{b})$

$= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$

यदि $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\quad \vec{a}.\vec{b} = 0$

तो $\quad (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$

पुनः $\quad (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$

$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ जबकि $\vec{a}.\vec{b} \neq 0$

∴ $\quad (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$ जब $\vec{a}.\vec{b} = 0$

यदि और केवल यदि $\vec{a}.\vec{b} = 0$ अर्थात् $\vec{a} \perp \vec{b}$. इति सिद्धम्।

प्रश्न 16 से 19 तक के प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए :

प्रश्न 16. यदि दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ हो तो $\vec{a}.\vec{b} \geq 0$ होगा, यदि :

(A) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (B) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < \theta < \pi$ (D) $0 \leq \theta \leq \pi$

हल : $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} \geq 0$

⇒ $\quad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \geq 0$

अब $|\vec{a}| = |\vec{b}| =$ धनात्मक हो, तब

$\cos\theta \geq 0$

इसीलिए $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

अतः विकल्प (B) सही है। उत्तर

प्रश्न 17. मान लीजिए $\vec{a}$ और $\vec{b}$ दो मात्रक सदिश हैं और उनके बीच का कोण θ है तो $\vec{a}+\vec{b}$ एक मात्रक सदिश है यदि—

(A) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (B) $\theta = \frac{\pi}{3}$

(C) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (D) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

हल : $|\vec{a}| = 1$ और $|\vec{b}| = 1$ (दिया है)

तथा $|\vec{a}+\vec{b}| = 1$

या $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 1$

या $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 1$

या $|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + |\vec{b}|^2 = 1$

या $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$

या $1+1+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta = 1$

या $2 + 2\times 1\cos\theta = 1$

$$2\cos\theta = -1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

अत: विकल्प (D) सही है। उत्तर

प्रश्न 18. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान है—

(A) 0 (B) – 1 (C) 1 (D) 3

हल : $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् इकाई सदिश है।

$\therefore$ $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

तथा $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$\therefore$ $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$

$$= \hat{i}.\hat{i}.\hat{j}.(\hat{k}\times\hat{i}) + \hat{k}.\hat{k}$$

$$= 1 - \hat{j}.\hat{j} + 1$$

$$= 1 - 1 + 1$$

$$= 1$$

अत: विकल्प (C) सही है। उत्तर

प्रश्न 19. यदि दो सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ हो तो $|\vec{a}\,.\,\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ जब θ बराबर है :

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

हल : $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है।

$\therefore \qquad |\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\theta|$

और $\qquad |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\theta|$

दिया है : $\qquad |\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$

$\therefore \qquad |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\theta| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\theta|$

या $\qquad |\cos\theta| = |\sin\theta|$

या $\qquad |\tan\theta| = 1$

या $\qquad \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}$

या $\qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

अत: विकल्प (B) सही है। उत्तर