गणित

(पाठ – 1) (संबंध एवं फलन)
(कक्षा 12)
प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1:
निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित संबंधों में से प्रत्येक स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हैं:

(i) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, \dots, 13, 14\}$ में संबंध R, इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(x, y): 3x - y = 0\}$$

(ii) प्राकृत संख्याओं के समुच्चय **N** में $R = \{(x, y): y = x + 5$ तथा $x < 4\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(iii) समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(x, y): y$ भाज्य है x से$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है।

(iv) समस्त पूर्णांकों के समुच्चय **Z** में $R = \{(x, y): x - y$ एक पूर्णांक है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R.

(v) किसी विशेष समय पर किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में निम्नलिखित संबंध R

(a) $R = \{(x, y): x$ तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं$\}$

(b) $R = \{(x, y): x$ तथा y एक ही मोहल्ले में रहते हैं$\}$

(c) $R = \{(x, y): x, y$ से ठीक – ठीक 7 सेमी लंबा है$\}$

(d) $R = \{(x, y): x, y$ की पत्नी है$\}$

(e) $R = \{(x, y): x, y$ के पिता है$\}$

उत्तर 1::
(i) $A = \{1, 2, 3 \dots 13, 14\}$

$R = \{(x, y): 3x - y = 0\}$

$\therefore R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$

R सममित नहीं है क्योंकि $(1, 1), (2, 2) \dots (14, 14) \notin R$.

तथा, R सममित नहीं है क्योंकि $(1, 3) \in R$, लेकिन $(3, 1) \notin R$. $[3(3) - 1 \neq 0]$

तथा, R संक्रामक नहीं है क्योंकि $(1, 3), (3, 9) \in R$, लेकिन $(1, 9) \notin R$. $[3(1) - 9 \neq 0]$

अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

(ii) $R = \{(x, y): y = x + 5$ तथा $x < 4\} = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

क्योंकि $(1, 1) \notin R$. $\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।

तथा $(1, 6) \in R$ लेकिन $(1, 6) \notin R$. $\therefore$ R सममित नहीं है।

किसी भी युग्म के लिए संबंध R में, $(x, y) \in R$ तथा $(y, z) \in R$ के लिए $(x, z) \in R$ नहीं है।

$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।

अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

(iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$R = \{(x, y)$: y भाज्य है x से $\}$

हम जानते हैं कि प्रत्येक संख्या स्वयं से भाज्य होती है, इसलिए $(x, x) \in R$

$\therefore$ R स्वतुल्य है।

अब, $(2, 4) \in R$ [क्योंकि 4 भाज्य है 2 से]

लेकिन $(4, 2) \notin R$. [क्योंकि 2 भाज्य नहीं है 4 से]

$\therefore$ R सममित नहीं है।

माना, $(x, y), (y, z) \in R$, इसलिए y भाज्य है x से और z भाज्य है y से। $\therefore$ z भाज्य है x से,

$\Rightarrow (x, z) \in R$, $\therefore$ R संक्रामक है।

अतः, R स्वतुल्य और संक्रामक हैं लेकिन सममित नहीं है।

(iv) $R = \{(x, y): x - y$ एक पूर्णांक है$\}$

यहाँ, प्रत्येक $x \in Z$ के लिए, $(x, x) \in R$ क्योंकि $x - x = 0$ एक पूर्णांक है। $\therefore$ R स्वतुल्य है।

माना संख्याएँ $x, y \in Z$, यदि $(x, y) \in R$, तब $x - y$ एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow -(x - y)$ भी एक पूर्णांक है।

$\Rightarrow (y - x)$ भी एक पूर्णांक है।

$\therefore (y, x) \in R$, इसलिए R सममित है।

अब, माना (x, y) और $(y, z) \in R$, जहाँ $x, y, z \in Z$.

⇒ (x – y) और (y – z) पूर्णांक हैं।
⇒ x – z = (x – y) + (y – z) पूर्णांक है।
∴ (x, z) ∈ R, इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

(v)

(a) R = {(*x*, *y*): *x* तथा y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं}
⇒ (*x*, *x*) ∈ R [क्योंकि x और x एक ही स्थान पर कार्य करते हैं]
∴ R स्वतुल्य है।
यदि (x, y) ∈ R, तब x और y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।
⇒ y और x एक ही स्थान पर कार्य करते हैं ।
⇒ (y, x) ∈ R.
∴ R सममित है।
अब, माना (x, y), (y, z) ∈ R
⇒ x और y एक ही स्थान पर कार्य करते हैं तथा y और z एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।
⇒ x और z एक ही स्थान पर कार्य करते हैं।
⇒ (*x*, *z*) ∈ R
∴ R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

(b) R = {(*x*, *y*): *x* तथा *y* एक ही मोहल्ले में रहते हैं}
यहाँ, (x, x) ∈ R क्योंकि x और x एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
∴ R स्वतुल्य है।
यदि (x, y) ∈ R, तब x और y एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ y और x एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ (y, x) ∈ R
∴ R सममित है।
अब, माना (x, y) ∈ R तथा (y, z) ∈ R.
⇒ x और y एक ही मोहल्ले में रहते हैं तथा y और z एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ x और z एक ही मोहल्ले में रहते हैं।
⇒ (x, z) ∈ R
∴ R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

(c) $R = \{(x, y): x, y$ से ठीक – ठीक 7 सेमी लंबा है$\}$
यहाँ, (x, x) ∉ R
क्योंकि कोई भी स्वयं से ही लंबा नहीं हो सकता है।
∴ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, माना (x, y) ∈ R. ⇒ x, y से ठीक – ठीक 7 सेमी लंबा है।
इसलिए, y, x से छोटा है अर्थात लंबा नहीं है। ∴ (y, x) ∉ R
इसीप्रकार यदि x, y से ठीक 7 सेमी लंबा है तो y, x से 7 सेमी छोटा है अर्थात लंबा नहीं है।
∴ R सममित नहीं है।
अब, माना (x, y) और (y, z) ∈ R.
⇒ x, y से ठीक 7 सेमी लंबा है तथा y, z से ठीक 7 सेमी लंबा है।
⇒ x, z से 14 सेमी लंबा है। ∴ (x, z) ∉ R
∴ R संक्रामक नहीं है।
अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

(d) R = = $\{(x, y): x, y$ की पत्नी है$\}$

अब, (x, x) ∉ R, क्योंकि कोई भी स्वयं की ही पत्नी नहीं हो सकती है।
∴ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, माना (x, y) ∈ R ⇒ x, y की पत्नी है।
तो y, x की पत्नी नहीं है बल्कि उसका पति है। ∴ (y, x) ∉ R
∴ R सममित नहीं है।
माना (x, y) और (y, z) ∈ R
⇒ x, y की पत्नी है तथा y, z की पत्नी है। परन्तु, यह संभव नहीं है। इसलिए x, z की पत्नी नहीं है।
∴ (x, z) ∉ R
∴ R संक्रामक नहीं है।
अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

(e) $\mathrm{R} = \{(x, y): x, y$ के पिता है$\}$
(x, x) ∉ R, क्योंकि कोई इन्सान खुद का ही पिता नहीं हो सकता है।
∴ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, माना (x, y) ∈ R,
⇒ x, y का पिता है।
⇒ y, x का पिता नहीं हो सकता है बल्कि y, x का पुत्र या पुत्री है।
∴ (y, x) ∉ R, इसलिए R सममित नहीं है।
अब, माना (x, y) ∈ R और (y, z) ∉ R.
⇒ x, y का पिता है तथा y, z का पिता है।
⇒ x, z का पिता नहीं है बल्कि x, z का दादा है।
∴ (x, z) ∉ R, इसलिए R संक्रामक नहीं है।
अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 2:
सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय **R** में $R = \{(a, b): a \leq b^2\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R, न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

उत्तर 2:
$R = \{(a, b): a \leq b^2\}$
यहाँ, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin R$, क्योंकि, $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$
∴ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, $(1, 4) \in R$ क्योंकि $1 < 4^2$ लेकिन, 4, 1^2 से छोटा नहीं है।
∴ (4, 1) ∉ R, इसलिए R सममित नहीं है।
यहाँ, (3, 2), (2, 1.5) ∈ R [क्योंकि $3 < 2^2 = 4$ तथा $2 < (1.5)^2 = 2.25$]
लेकिन, $3 > (1.5)^2 = 2.25$
∴ (3, 1.5) ∉ R, इसलिए R संक्रामक नहीं है।
अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 3:
जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(a, b): b = a + 1\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित या संक्रामक है।

उत्तर 3:
माना A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
प्रशनानुसार, संबंध R = {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)} इसलिए (a, a) ∉ R, जहाँ a ∈ A.

क्योंकि, (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) $\notin$ R

$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।

यहाँ (1, 2) $\in$ R, लेकिन (2, 1) $\notin$ R, इसलिए R सममित नहीं है।

अब, (1, 2), (2, 3) $\in$ R लेकिन, (1, 3) $\notin$ R, इसलिए R संक्रामक नहीं है।

अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए कि **R** में $R = \{(a, b): a \leq b\}$, द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

उत्तर 4:

R = {(a, b): a ≤ b}

यहाँ (a, a) $\in$ R [क्योंकि a = a]

$\therefore$ R स्वतुल्य है।

अब, (2, 4) $\in$ R (क्योंकि 2 < 4) लेकिन, (4, 2) $\notin$ R क्योंकि 4 > 2.

$\therefore$ R सममित नहीं है।

अब, माना (a, b), (b, c) $\in$ R, तब, a ≤ b और b ≤ c

$\Rightarrow$ a ≤ c $\Rightarrow$ (a, c) $\in$ R,

इसलिए R संक्रामक है।

अतः, R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

प्रश्न 5:

जाँच कीजिए कि क्या **R** में $R = \{(a, b): a \leq b^3\}$ द्वारा परिभाषित संबंध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है?

उत्तर 5:

R = {(a, b): a ≤ b^3}

प्रशनानुसार, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin$ R, क्योंकि, $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।

अब, (1, 2) $\in$ R (क्योंकि 1 < 2^3 = 8) लेकिन, (2, 1) $\notin$ R (as 2^3 > 1)

$\therefore$ R सममित नहीं है।

यहाँ, $\left(3, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right) \in$ R, क्योंकि $3 < \left(\frac{3}{2}\right)^3$ और $\frac{3}{2} < \left(\frac{6}{5}\right)^3$ लेकिन $\left(3, \frac{6}{5}\right) \notin$ R क्योंकि $3 > \left(\frac{6}{5}\right)^3$

$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।

अतः, R न तो स्वतुल्य है, न सममित हैं और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$, द्वारा प्रदत्त संबंध R सममित हैं किन्तु न तो स्वतुल्य है और न संक्रामक है।

उत्तर 6:

माना A = {1, 2, 3}.

संबंध R = {(1, 2), (2, 1)}.

यहाँ (1, 1), (2, 2), (3, 3) $\notin$ R.

$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।

अब, क्योंकि (1, 2) $\in$ R और (2, 1) $\in$ R, इसलिए R सममित है।

तथा, (1, 2) और (2, 1) $\in$ R, लेकिन, (1, 1) $\notin$ R

$\therefore$ R संक्रामक नहीं है।

अतः, R सममित है लेकिन न स्वतुल्य हैं और न ही संक्रामक है।

प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए कि किसी कॉलेज के पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों के समुच्चय A में $R = \{(x, y): x$ तथा y में पेजों की संख्या समान है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है।

उत्तर 7:

A पुस्तकालय की समस्त पुस्तकों का समुच्चय है।
R = {x, y): x तथा y में पेजों की संख्या समान है}
यहाँ, R स्वतुल्य है, अर्थात (x, x) ∈ R क्योंकि x और x में पेजों की संख्या समान है।
माना (x, y) ∈ R ⇒ x और y में पेजों की संख्या समान है।
⇒ y और x में पेजों की संख्या समान है।
⇒ (y, x) ∈ R, इसलिए R सममित है।
अब, माना (x, y) ∈ R और (y, z) ∈ R.
⇒ x और y में पेजों की संख्या समान है तथा y और z में पेजों की संख्या समान है।
⇒ x और z में पेजों की संख्या समान है।
⇒ (x, z) ∈ R, इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।

प्रश्न 8:

सिद्ध कीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ में, $R = \{(a, b): |a - b|$ सम है$\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। प्रमाणित कीजिए कि $\{1, 3, 5\}$ के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं और समुच्चय $\{2, 4\}$ के सभी अवयव एक दुसरे से संबंधित हैं परंतु $\{1, 3, 5\}$ का कोई भी अवयव $\{2, 4\}$ के किसी अवयव से संबंधित नहीं है।

उत्तर 8:

यहाँ A = {1, 2, 3, 4, 5} और संबंध $R = \{(a, b): |a - b|$ सम है$\}$
प्रश्न के अनुसार, सभी a ∈ A के लिए $|a - a| = 0$ (जो की सम है).
∴ R स्वतुल्य है।
माना (a, b) ∈ R. ⇒$|a - b|$ सम है।
⇒$|-(a - b)| = |b - a|$ भी सम है। ⇒ (b, a) ∈ R, इसलिए R सममित है।
अब, माना (a, b) ∈ R और (b, c) ∈ R.
⇒$|a - b|$ सम है और $|b - c|$ सम है। ⇒$(a - b)$ सम है और $(b - c)$ सम है।
⇒$(a - c) = (a - b) + (b - c)$ सम है। [क्योंकि दो सम संख्याओं का योग सम होता है]
⇒$|a - b|$ सम है ⇒ (a, c) ∈ R, इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।
समुच्चय {1, 2, 3} के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं क्योंकि इसके सभी अवयव विषम हैं। विषम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है।
इसीप्रकार, समुच्चय {2, 4 के सभी अवयव एक दूसरे से संबंधित हैं क्योंकि इसके सभी अवयव सम हैं। सम संख्याओं का अंतर सदैव सम होता है।
समुच्चय {1, 3, 5} का कोई भी अवयव समुच्चय {2, 4} के किसी भी अवयव से संबंधित नहीं है, क्योंकि समुच्चय {1, 3, 5} के सभी अवयव विषम है तथा समुच्चय {2, 4} के सभी अवयव सम है। सम और विषम संख्याओं का अंतर सदैव विषम होता है।
[जैसे 1 – 2, 1 – 4, 3 – 2, 3 – 4, 5 – 2 और 5 – 4 सभी विषम है।]

प्रश्न 9:

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in Z: 0 \leq x \leq 12\}$, में दिए गए निम्नलिखित संबंधो R में से प्रत्येक एक तुल्यता संबंध है:
(i) $R = \{(a, b): |a - b|, 4$ का एक गुणज है$\}$, **(ii)** $R = \{(a, b): a = b\}$,
प्रत्येक दशा में 1 से संबंधित अवयवों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:

(i) $A = \{x \in \boldsymbol{Z}: 0 \leq x \leq 12\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
R = {(a, b):|a – b|, 4 का एक गुणज है}
अवयव a ∈ A के लिए, (a, a) ∈ R   क्योंकि |a – a| = 0, 4 का एक गुणज है।
∴ R स्वतुल्य है।
अब, माना (a, b) ∈ R ⇒ |a – b|, 4 का एक गुणज है।
⇒| – (a – b)| = |b – a|, 4 का एक गुणज है। ⇒ (b, a) ∈ R
∴ R सममित है।
माना (a, b) और (b, c) ∈ R.
⇒ |a – b|, 4 का एक गुणज है और |b – c|, 4 का एक गुणज है।
⇒ (a – b), 4 का एक गुणज है और (b – c), 4 का एक गुणज है।
⇒ (a – c) = (a – b) + (b – c), 4 का एक गुणज है।
⇒ |a – c|, 4 का एक गुणज है। ⇒ (a, c) ∈ R
∴ R संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।
1 से संबंधित अवयव इस प्रकार हैं: {1, 5, 9} क्योंकि
|1 – 1| = 0 जो कि 4 का एक गुणज है।
|5 – 1| = 4 जो कि 4 का एक गुणज है।
|9 – 1| = 8 जो कि 4 का एक गुणज है।

(ii) R = {(a, b): a = b}
किसी अवयव a ∈ A के लिए, (a, a) ∈ R, क्योंकि a = a.
∴ R स्वतुल्य है।
अब, माना (a, b) ∈ R   ⇒ a = b   ⇒ b = a   ⇒ (b, a) ∈ R
∴ R सममित है।
माना (a, b) ∈ R और (b, c) ∈ R   ⇒ a = b और b = c   ⇒ a = c
⇒ (a, c) ∈ R
∴ R संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।
1 से संबंधित समुच्चय A का अवयव {1} है क्योंकि $1 = 1$.

प्रश्न 10:

ऐसे संबंध का उदाहरण दीजिए, जो
(i) सममित हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न संक्रामक हो।
(ii) संक्रामक हो परंतु न तो स्वतुल्य हो और न सममित हो।
(iii) स्वतुल्य तथा सममित हो किंतु संक्रामक न हो।
(iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक हो किंतु सममित न हो।
(v) सममित तथा संक्रामक हो किंतु स्वतुल्य न हो।

उत्तर 10:

(i) माना A = {5, 6, 7}.
तथा संबंध R = {(5, 6), (6, 5)}.
संबंध R स्वतुल्य नहीं है क्योंकि (5, 5), (6, 6), (7, 7) ∉ R.
अब, क्योंकि (5, 6) ∈ R और (6, 5) ∈ R, इसलिए R सममित है।
⇒ (5, 6), (6, 5) ∈ R, लेकिन (5, 5) ∉ R
∴ R संक्रामक नहीं है।
अतः, संबंध R सममित है परंतु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रामक है।

(ii) माना संबंध R समुच्चय **R** में परिभाषित है तथा $R = \{(a, b): a < b\}$
किसी अवयव $a \in R$ के लिए, $(a, a) \notin R$, क्योंकि a स्वयं से छोटा नहीं हो सकता है।
$\therefore$ R स्वतुल्य नहीं है।
अब, $(1, 2) \in R$ (क्योंकि $1 < 2$) लेकिन, संख्या 2, संख्या 1 से छोटी नहीं है।
$\therefore (2, 1) \notin R$, इसलिए R सममित नहीं है।
माना (a, b) और $(b, c) \in R$.
$\Rightarrow a < b$ और $b < c$ $\Rightarrow a < c$ $\Rightarrow (a, c) \in R$
$\therefore$ R संक्रामक है।
अतः, संबंध R संक्रामक है परंतु न तो स्वतुल्य है और न ही सममित है।

(iii) माना $A = \{4, 6, 8\}$.
माना समुच्चय A पर परिभाषित संबंध R निम्नलिखित प्रकार से है।
$R = \{(4, 4), (6, 6), (8, 8), (4, 6), (6, 4), (6, 8), (8, 6)\}$
संबंध R स्वतुल्य है, क्योंकि प्रत्येक अवयव $a \in A$ के लिए, $(a, a) \in R$
अर्थात $(4, 4), (6, 6), (8, 8) \in R$.
संबंध R सममित है, क्योंकि $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$, सभी $a, b \in R$ के लिए।
संबंध R संक्रामक नहीं है, क्योंकि $(4, 6), (6, 8) \in R$, लेकिन $(4, 8) \notin R$.
अतः, संबंध R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।

(iv) माना संबंध R समुच्चय **R** में परिभाषित है।
$R = \{a, b): a^3 \geq b^3\}$
इसलिए $(a, a) \in R$ [क्योंकि $a^3 = a^3$]
$\therefore$ R स्वतुल्य है।
यहाँ, $(2, 1) \in R$ [क्योंकि $2^3 \geq 1^3$]
लेकिन, $(1, 2) \notin R$ [क्योंकि $1^3 < 2^3$]
$\therefore$ R सममित नहीं है।
अब, माना (a, b) और $(b, c) \in R$.
$\Rightarrow a^3 \geq b^3$ और $b^3 \geq c^3$ $\Rightarrow a^3 \geq c^3$ $\Rightarrow (a, c) \in R$
$\therefore$ R संक्रामक है।
अतः, संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।

(v) माना $A = \{-5, -6\}$.
माना, संबंध R समुच्चय A पर निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है।
$R = \{(-5, -6), (-6, -5), (-5, -5)\}$
संबंध R स्वतुल्य नहीं है क्योंकि $(-6, -6) \notin R$.
संबंध R सममित है क्योंकि $(-5, -6) \in R$ और $(-6, -5) \in R$.
तथा, यदि $(-5, -6)$ और $(-6, -5) \in R$, तब $(-5, -5) \in R$
इसलिए, संबंध R संक्रामक है।
अतः, संबंध R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।

प्रश्न 11:
सिद्ध कीजिए कि किसी समतल में स्थित बिंदुओं के समुच्चय में, $R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है} द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है। पुनः सिद्ध कीजिए कि बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

उत्तर 11:
$R = \{(P, Q)$: बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है}

यहाँ, (P, P) ∈ R क्योंकि बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
∴ R स्वतुल्य है।
माना, (P, Q) ∈ R.
⇒ बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
⇒ बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
⇒ (Q, P) ∈ R, इसलिए R सममित है।
अब, माना (P, Q) और (Q, S) ∈ R.
⇒ बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी के समान है तथा बिंदु Q की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु S की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
⇒ बिंदु P की मूल बिंदु से दूरी, बिंदु S की मूल बिंदु से दूरी के समान है।
⇒ (P, S) ∈ R, इसलिए R संक्रामक है।
इसलिए, संबंध R एक तुल्यता संबंध है।
बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं के समुच्चय में वे बिंदु आते हैं जो मूल बिंदु से उतनी ही दुरी पर हैं जितना बिंदु P मूल बिंदु से दूर है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि यदि O (0, 0) मूल बिंदु है और OP = k है, तो P से संबंधित सभी बिंदु मूल बिंदु से k दूरी पर होंगे।
अतः, बिंदु $P \neq (0, 0)$ से संबंधित सभी बिंदुओं का समुच्चय P से होकर जाने वाले एक ऐसे वृत्त को निरूपित करता है, जिसका केंद्र मूलबिंदु पर है।

प्रश्न 12:

सिद्ध कीजिए कि समस्त त्रिभुजों के समुच्चय A में $R = \{(T_1, T_2): T_1, T_2$ के समरूप है$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। भुजाओं $3, 4, 5$ वाले समकोण त्रिभुज T_1, भुजाओं $5, 12, 13$ वाले समकोण त्रिभुज T_2 तथा भुजाओं $6, 8, 10$ वाले समकोण त्रिभुज T_3 पर विचार कीजिए। T_1, T_2 और T_3 में से कौन से त्रिभुज परस्पर संबंधित हैं?

उत्तर 12:

R = {(T_1, T_2): T_1, T_2 के समरूप है}
R स्वतुल्य है क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के समरूप होता है।
अब, यदि (T_1, T_2) ∈ R, तब T_1, T_2 के समरूप है। ⇒ T_2, T_1 के समरूप है।
⇒ (T_2, T_1) ∈ R, इसलिए R सममित है।
माना (T_1, T_2) और (T_2, T_3) ∈ R ⇒ T_1, T_2 के समरूप है और T_2, T_3 के समरूप है।
⇒ T_1, T_3 के समरूप है। ⇒ (T_1, T_3) ∈ R, इसलिए R संक्रामक है।
इसप्रकार, R एक तुल्यता संबंध है।
अब हम देखते हैं कि $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \left(= \frac{1}{2}\right)$
क्योंकि त्रिभुजों T_1 और T_3 की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं, इसलिए, त्रिभुज T_1, T_3 के समरूप है।
अतः, त्रिभुज T_1, त्रिभुज T_3 से संबंधित है।

प्रश्न 13:

सिद्ध कीजिए कि समस्त बहुभुजों के समुच्चय A में, $R = \{(P_1, P_2): P_1$ तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है$\}$ प्रकार से परिभाषित संबंध R एक तुल्यता संबंध है। 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A के सभी अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर 13:

R = {(P_1, P_2): P_1 तथा P_2 की भुजाओं की संख्या समान है}
R स्वतुल्य है, क्योंकि (P_1, P_1) ∈ R
माना (P_1, P_2) ∈ R ⇒ P_1 और P_2 की भुजाओं की संख्या समान है।
⇒ P_2 और P_1 की भुजाओं की संख्या समान है। ⇒ (P_2, P_1) ∈ R
∴ R सममित है।

अब, माना (P_1, P_2) और $(P_2, P_3) \in R$.
$\Rightarrow P_1$ और P_2 की भुजाओं की संख्या समान है तथा P_2 और P_3 की भुजाओं की संख्या समान है।
$\Rightarrow P_1$ और P_3 की भुजाओं की संख्या समान है। $\Rightarrow (P1, P3) \in R$
$\therefore$ R संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।
इसलिए, 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A में वे सभी बहुभुज होंगे जिनकी भुजाएँ 3 हैं
अतः, 3, 4 और 5 लंबाई की भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज से संबंधित समुच्चय A में वे सभी बहुभुज त्रिभुज होंगे।

प्रश्न 14:

मान लीजिए कि XY -तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय L है और L में $R = \{(L_1, L_2): L_1$ समान्तर है L_2 के$\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है। रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित समस्त रेखाओं का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

उत्तर 14:

$R = \{(L_1, L_2): L_1$ समांतर है L_2 के$\}$
R स्वतुल्य है क्योंकि कोई भी रेखा L_1 स्वयं के समांतर होती है। इसलिए $(L_1, L_1) \in R$.
माना $(L_1, L_2) \in R$. $\Rightarrow L_1$ समांतर है L_2 के $\Rightarrow L_2$ समांतर है L_1 के $\Rightarrow (L_2, L_1) \in R$, इसलिए R सममित है।
अब, माना (L_1, L_2) और $(L_2, L_3) \in R \Rightarrow L_1$ समांतर है L_2 के तथा L_2 समांतर है L_3 के।
$\Rightarrow L_1$ समांतर है L_3 के। इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R एक तुल्यता संबंध है।
रेखा $y = 2x + 4$ से संबंधित सभी रेखाओं का समुच्चय, रेखा $y = 2x + 4$ के समांतर सभी रेखाओं का समुच्चय होगा।
रेखा $y = 2x + 4$ की प्रवणता $m = 2$
हम जानते हैं की समांतर रेखाओं की प्रवणता समान होती है। दी गई रेखा के समांतर कोई रेखा $y = 2x + c$ के रूप में होगी, जहाँ $c \in R$.
अतः, दी गई रेखा से संबंधित सभी रेखाओं का समुच्चय $y = 2x + c$ है, जहाँ $c \in R$ है।

प्रश्न 15:

मान लीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ में, $R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए।
(A) R स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है।
(B) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।
(C) R सममित तथा संक्रामक है किंतु स्वतुल्य नहीं है।
(D) R एक तुल्यता संबंध है।

उत्तर 15:

$R = \{(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)\}$, यहाँ $(a, a) \in R$, सभी अवयवों $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ के लिए।
$\therefore$ R स्वतुल्य है।
यहाँ $(1, 2) \in R$ लेकिन $(2, 1) \notin R$, इसलिए R सममित नहीं है।
अब, यहाँ (a, b) और $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ सभी अवयवों $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$, इसलिए R संक्रामक है।
अतः, R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किंतु सममित नहीं है।
अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 16:

मान लीजिए कि समुच्चय **N** में, $R = \{(a, b): a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध R है। निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए:
(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

उत्तर 16:

$R = \{(a, b): a = b - 2, b > 6\}$
यहाँ, क्योंकि $b > 6$, इसलिए $(2, 4) \notin R$ तथा $3 \neq 8 - 2$, $\therefore (3, 8) \notin R$ और $8 \neq 7 - 2$, $\therefore (8, 7) \notin R$
अब $(6, 8)$ के लिए, $8 > 6$ और $6 = 8 - 2$. $\therefore (6, 8) \in R$
अतः, विकल्प (C) सही है।

गणित

(पाठ – 1) (संबंध एवं फलन)
(कक्षा 12)
प्रश्नावली 1.2

प्रश्न 1:
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \boldsymbol{R}_* \to \boldsymbol{R}_*$ एकैकी तथा आच्छादक है, जहाँ $\boldsymbol{R}_*$ सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। यदि प्रांत $\boldsymbol{R}_*$ को $\mathbf{N}$ से बदल दिया जाए, जब कि सहप्रांत पूर्ववत $\boldsymbol{R}_*$ ही रहे, तो भी क्या यह परिणाम सत्य होगा?

उत्तर 1:
$f(x) = \frac{1}{x}$
एकैकी के लिए:
माना $x, y \in \mathrm{R}_*$ इस प्रकार हैं कि $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow \frac{1}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{y}}$
$\Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y}$, $\therefore f$ एकैकी फलन है।
आच्छादक के लिए:
यहाँ $y \in \mathrm{R}_*$ के लिए, $\mathrm{x} = \frac{1}{\mathrm{y}} \in \mathrm{R}_*$ [क्योंकि $\mathrm{y} \neq 0$] का अस्तित्व है, जहाँ

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\mathrm{y}}\right)} = \mathrm{y}$$

$\therefore f$ आच्छादक है।
इसप्रकार, $f(x) = \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \boldsymbol{R}_* \to \boldsymbol{R}_*$ एकैकी तथा आच्छादक है।
अब, माना $g(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}}$ द्वारा परिभाषित कोई फलन $g: \mathbf{N} \to \mathrm{R}_*$ है। इसलिए,
$g(x_1) = g(x_2)$ $\Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$ $\Rightarrow x_1 = x_2$
$\therefore g$ एकैकी फलन है।
यहाँ, फलन g आच्छादक नहीं है क्योंकि $1.2 \in \mathrm{R}_*$ के लिए $\mathbf{N}$ में कोई x नहीं है जिसके लिए $g(\mathrm{x}) = \frac{1}{1.2}$.
अतः, फलन g एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

प्रश्न 2:
निम्नलिखित फलनों की एकैक (Injective) तथा आच्छादि (Surjective) गुणों की जाँच कीजिए:
(i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ फलन है।
(ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ फलन है।
(iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ फलन है।
(iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ फलन है।
(v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ फलन है।

उत्तर 2:
(i) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ फलन है।
माना, किसी $x, y \in \mathbf{N}$ के लिए, $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow x^2 = y^2$ $\Rightarrow x = y$.
$\therefore f$ एकैक है।
यहाँ, $2 \in \mathbf{N}$, लेकिन, $\mathbf{N}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = x^2 = 2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

(ii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ फलन है।
यहाँ, $-1, 1 \in \boldsymbol{Z}$ के लिए $f(-1) = f(1) = 1$, लेकिन $-1 \neq 1$, इसलिए f एकैक नहीं है।
यहाँ, $-2 \in \boldsymbol{Z}$, लेकिन, $\boldsymbol{Z}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = -2$ अर्थात $x^2 = -2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f न तो एकैक है और न ही आच्छादि है।

(iii) $f(x) = x^2$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ फलन है।
यहाँ, $-1, 1 \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(-1) = f(1) = 1$, लेकिन $-1 \neq 1$, इसलिए f एकैक नहीं है।
यहाँ, $-2 \in \mathbf{R}$, लेकिन, $\mathbf{R}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = -2$ अर्थात $x^2 = -2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f न तो एकैक और न ही आच्छादि है।

(iv) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ फलन है।
माना, किसी $x, y \in \mathbf{N}$ के लिए, $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow x^3 = y^3$ $\Rightarrow x = y$.
$\therefore f$ एकैक है।
यहाँ, $2 \in \mathbf{N}$, लेकिन, $\mathbf{N}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = 2$ अर्थात $x^3 = 2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

(v) $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ फलन है।
माना, किसी $x, y \in \mathbf{Z}$ के लिए, $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow x^3 = y^3$ $\Rightarrow x = y$.
$\therefore f$ एकैक है।
यहाँ, $2 \in \mathbf{Z}$, लेकिन, $\mathbf{Z}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = 2$ अर्थात $x^3 = 2$.
$\therefore f$ आच्छादि नहीं है।
अतः, फलन f एकैक है परन्तु आच्छादि नहीं है।

प्रश्न 3:
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $[x]$, x से कम या उसके बराबर महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है।

उत्तर 3:
दिया है: $f(x) = [x]$ द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$
यहाँ, $f(1.2) = [1.2] = 1$ और $f(1.9) = [1.9] = 1$, इसलिए $f(1.2) = f(1.9)$ लेकिन $1.2 \neq 1.9$.
$\therefore f$ एकैकी फलन है।
हम जानते हैं कि सभी दशमलव की संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ होती हैं, जैसे $0.7 \in \mathbf{R}$.
यहाँ, $0.7 \in \mathbf{R}$, लेकिन, $\mathbf{R}$ में x का कोई ऐसा मान नहीं है कि $f(x) = 0.7$
अतः, महत्तम पूर्णांक फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

प्रश्न 4:
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ द्वारा प्रदत्त मापांक फलन $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, न तो एकैकी है और न आच्छादक है, जहाँ $|x|$ बराबर x, यदि x धन या शून्य है तथा $|x|$ बराबर $-x$ यदि x ऋण है।

उत्तर 4:
फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ को पुनः व्यवस्थित करने पर $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x, & \text{यदि if } x < 0 \end{cases}$
यहाँ, $f(-1) = |-1| = 1$ और $f(1) = |1| = 1$, इसलिए $f(-1) = f(1)$, लेकिन $-1 \neq 1$.
$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।
हम जानते हैं कि $f(x) = |x|$ सदैव धनात्मक होता है।
यहाँ $-1 \in \mathbf{R}$ के लिए, x का कोई मान नहीं है ताकि $f(x) = |x| = -1$.
$\therefore f$ आच्छादक नहीं है।
अतः, मापांक फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

प्रश्न 5:

सिद्ध कीजिए कि $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, \text{यदि } x > 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \\ -1, \text{यदि } x < 0, \end{cases}$ द्वारा प्रदत्त चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

उत्तर 5:

दिया है: $f(x) = \begin{cases} 1, \text{यदि } x > 0 \\ 0, \text{यदि } x = 0 \\ -1, \text{यदि } x < 0, \end{cases}$

यहाँ, $1, 2 \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(1) = f(2) = 1$, लेकिन $1 \neq 2$.

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

जैसा कि दिया है, फलन $f(x)$ में केवल 3 संख्याएँ (1, 0 या –1) ही हैं, इसलिए $-2 \in \mathbf{R}$ के लिए, x का कोई भी मान ऐसा नहीं है ताकि $f(x) = -2$ हो। $\therefore f$ आच्छादक नहीं है।

अतः, चिह्न फलन न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

प्रश्न 6:

मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ A से B तक एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि f एकैकी है।

उत्तर 6:

दिया है: $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{4, 5, 6, 7\}$.

फलन $f: A \to B$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$.

$\therefore f(1) = 4, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 6$

यहाँ A के प्रत्येक अवयव के लिए B में एक अद्वितीय अवयव है। अतः, फलन f एकैकी फलन है।

प्रश्न 7:

निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति में बतलाइए की क्या दिए हुए फलन एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादि (bijective) हैं। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

(i) $f(x) = 3 - 4x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है। **(ii)** $f(x) = 1 + x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।

उत्तर 7:

(i) माना $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ इसप्रकार हैं कि $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 3 - 4x_1 = 3 - 4x_2 \qquad \Rightarrow -4x_1 = -4x_2 \qquad \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।

यहाँ, $\mathbf{R}$ में किसी वास्तविक संख्या (y) के लिए, $\frac{3-y}{4}$ का अस्तित्व $\mathbf{R}$ में है, इसलिए $f\left(\frac{3-y}{4}\right) = 3 - 4\left(\frac{3-y}{4}\right) = y$

$\therefore f$ आच्छादक है।

अतः, f एकैकी आच्छादि है।

(ii) माना $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ इसप्रकार हैं कि $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2 \qquad \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \qquad \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

इसप्रकार $f(x_1) = f(x_2)$ है परन्तु यह अवश्यक नहीं है कि $x_1 = x_2$ भी होगा।

जैसे कि $f(1) = f(-1) = 2$

$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।

यहाँ, $f(x) = 1 + x^2$ सदैव धनात्मक होगा यदि $x \in \mathbf{R}$, इसलिए

$\mathbf{R}$ में अवयव –2 के लिए, x का कोई वास्तविक मान नहीं है ताकि $f(x) = -2$ हो।

$\therefore f$ आच्छादक नहीं है।

अतः, फलन न तो एकैकी और न ही आच्छादक हैं।

प्रश्न 8:
मान लीजिए कि A तथा B दो समुच्चय हैं। सिद्ध कीजिए कि $f: A \times B \to B \times A$, इस प्रकार कि $f(a, b) = (b, a)$ एक एकैकी आच्छादि (bijective) फलन है।

उत्तर 8:
दिया है: $f: A \times B \to B \times A$ इसप्रकार है कि $f(a, b) = (b, a)$.
माना $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, इसप्रकार हैं कि $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$
$\Rightarrow (b_1, a_1) = (b_2, a_2)$ $\Rightarrow b_1 = b_2$ और $a_1 = a_2$ $\Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$
$\therefore f$ एकैकी फलन है।
अब, माना $(b, a) \in B \times A$ कोई अवयव है।
तब, $(a, b) \in A \times B$ इसप्रकार है कि $f(a, b) = (b, a)$ [फलन f की परिभाषा के अनुसार]
$\therefore f$ आच्छादक है।
अतः, f एकैकी आच्छादि फलन है।

प्रश्न 9:
मान लीजिए कि समस्त $n \in \boldsymbol{N}$ के लिए, $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2}, \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ है। बतलाइए कि क्या फलन f एकैकी आच्छादि (bijective) है। अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 9:
दिया है: $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2}, \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$ समस्त $n \in \boldsymbol{N}$ के लिए
यहाँ, $f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$ और $f(2) = \frac{2}{2} = 1$ [$f(\mathrm{n})$ की परिभाषा के अनुसार]
इसप्रकार, $f(1) = f(2)$ लेकिन $1 \neq 2$
$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।
माना n, सहप्रांत **N** में कोई प्राकृत संख्या है।
स्थिति **I:** जब n एक विषम संख्या है।
$\therefore n = 2r + 1$, कुछ $r \in \mathbf{N}$ के लिए। तब, $4r + 1 \in \mathbf{N}$ का अस्तित्व होगा ताकि $f(4\mathrm{r} + 1) = \frac{4\mathrm{r}+1+1}{2} = 2\mathrm{r} + 1$
स्थिति **II:** जब n एक सम संख्या है।
$\therefore n = 2r$, कुछ $r \in \mathbf{N}$ के लिए। तब $4r \in \mathbf{N}$ का अस्तित्व होगा ताकि $f(4\mathrm{r}) = \frac{4\mathrm{r}}{2} = 2\mathrm{r}$.
$\therefore f$ आच्छादक है।
अतः, फलन f एकैकी आच्छादि है।

प्रश्न 10:
मान लीजिए कि $A = \boldsymbol{R} - \{3\}$ तथा $B = \boldsymbol{R} - \{1\}$ हैं। $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f: A \to B$ पर विचार कीजिए। क्या f एकैकी तथा आच्छादक है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 10:
$A = \mathbf{R} - \{3\}$, $B = \mathbf{R} - \{1\}$ और $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ द्वारा परिभाषित फलन $f: A \to B$
माना $x, y \in A$ इस प्रकार हैं कि $f(x) = f(y)$
$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3}$
$\Rightarrow (x - 2)(y - 3) = (y - 2)(x - 3)$
$\Rightarrow xy - 3x - 2y + 6 = xy - 2x - 3y + 6$
$\Rightarrow -3x - 2y = -2x - 3y \Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी फलन है।
माना $y \in B = \mathbf{R} - \{1\}$, तब $y \neq 1$.
फलन f आच्छादक होगा यदि $x \in A$ के लिए, $f(x) = y$.
इसलिए, $f(x) = y$
$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3} = y$
$\Rightarrow x - 2 = xy - 3y$
$\Rightarrow x(1 - y) = -3y + 2$
$\Rightarrow x = \frac{2-3y}{1-y} \in A$ $\quad\quad\quad\quad$ $[y \neq 1]$
यहाँ, किसी $y \in B$ के लिए, $\frac{2-3y}{1-y} \in A$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 2}{\left(\frac{2-3y}{1-y}\right) - 3} = \frac{2-3y-2+2y}{2-3y-3+3y} = \frac{-y}{-1} = y$$

$\therefore f$ आच्छादक है।
अतः, फलन f एकैकी तथा आच्छादक है।

प्रश्न 11:

मान लीजिए कि $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है। सही उत्तर का चयन कीजिए।
(A) f एकैकी आच्छादक है
(B) f बहुएक आच्छादक है
(C) f एकैकी है किंतु आच्छादक नहीं है
(D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

उत्तर 11:

$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है।
माना $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(x) = f(y)$.
$\Rightarrow x^4 = y^4$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Rightarrow x = \pm y$
$\therefore f(x) = f(y)$ से हमें $x = y$ प्राप्त नहीं होता है।
उदहारण के लिए $f(1) = f(-1) = 1$
$\therefore f$ एकैकी फलन नहीं है।
माना, सहप्रांत $\mathbf{R}$ में 2 कोई अवयव है। $\mathbf{R}$ में x का ऐसा कोई मान नहीं है कि $f(x) = 2$.
$\therefore f$ आच्छादक नहीं है।
अतः, फलन f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।
इसलिए, विकल्प (D) सही है।

प्रश्न 12:

मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ है। सही उत्तर चुनिए:
(A) f एकैकी आच्छादक है
(B) f बहुएक आच्छादक है
(C) f एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है
(D) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है

उत्तर 12:

$f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ है।
माना $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए, $f(x) = f(y)$.
$\Rightarrow 3x = 3y$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Rightarrow x = y$
$\therefore f$ एकैकी फलन है।
तथा सहप्रान्त $\mathbf{R}$ में किस वास्तविक संख्या (y) के लिए, $\frac{y}{3}$ का अस्तित्व इसप्रकार है कि $f\left(\frac{y}{3}\right) = 3\left(\frac{y}{3}\right) = y$
$\therefore f$ आच्छादक है।
अतः, फलन f एकैकी आच्छादक है ।
इसलिए, विकल्प (A) सही है।

गणित

(पाठ – 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 1.3

प्रश्न 1:

मान लीजिए कि f: {1, 3, 4} → {1, 2, 5} तथा g: {1, 2, 5} → {1, 3}, f = {(1, 2), (3, 5), (4, 1)} तथा g = {(1, 3), (2, 3), (5, 1)} द्वारा प्रदत्त हैं। gof ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

दिया गया फलन f: {1, 3, 4} → {1, 2, 5} और g: {1, 2, 5} → {1, 3},

f = {(1, 2), (3, 5), (4, 1)} और g = {(1, 3), (2, 3), (5, 1)}.

$gof(1) = g[f(1)] = g(2) = 3$ [क्योंकि $f(1) = 2$ और $g(2) = 3$]

$gof(3) = g[f(3)] = g(5) = 1$ [क्योंकि $f(3) = 5$ और $g(5) = 1$]

$gof(4) = g[f(4)] = g(1) = 3$ [क्योंकि $f(4) = 1$ और $g(1) = 3$]

∴ gof = {(1, 3), (3, 1), (4, 3)}

प्रश्न 2:

मान लीजिए f, g तथा h **R** से **R** तक दिए फलन हैं। सिद्ध कीजिए कि

$(f + g)oh = foh + goh$

$(f.g)oh = (foh).(goh)$

उत्तर 2:

सिद्ध करना है कि $(f + g)oh = foh + goh$

बायाँ पक्ष = $[(f + g)oh](x)$

$= (f + g)[h(x)] = f[h(x)] + g[h(x)]$

$= (foh)(x) + (goh)(x)$

$= \{(foh)(x) + (goh)\}(x)$ = दायाँ पक्ष

$\therefore \{(f + g)oh\}(x) = \{(foh)(x) + (goh)\}(x)$ सभी $x \in$ **R** के लिए

अतः, $(f + g)oh = foh + goh$

सिद्ध करना है कि $(f.g)oh = (foh).(goh)$

बायाँ पक्ष = $[(f.g)oh](x)$

$= (f.g)[h(x)] = f[h(x)] \,.\, g[h(x)]$

$= (foh)(x) \,.\, (goh)(x)$

$= \{(foh).(goh)\}(x)$ = दायाँ पक्ष

$\therefore [(f.g)oh](x) = \{(foh).(goh)\}(x)$ सभी $x \in$ **R** के लिए

अतः, $(f.g)oh = (foh).(goh)$

प्रश्न 3:

gof तथा fog ज्ञात कीजिए, यदि

(i) $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |5x - 2|$ **(ii)** $f(x) = 8x^3$ तथा $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

उत्तर 3:

(i). $f(x) = |x|$ तथा $g(x) = |5x-2|$

$\therefore gof(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |5|x|-2|$

$fog(x) = f(g(x)) = f(|5x-2|) = ||5x-2|| = |5x-2|$

(ii). $f(x) = 8x^3$ और $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$\therefore gof(x) = g(f(x)) = g(8x^3) = (8x^3)^{\frac{1}{3}} = 2x$

$fog(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = 8(x^{\frac{1}{3}})^3 = 8x$

प्रश्न 4:

यदि $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}, x \neq \frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीजिए कि सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए $fof(x) = x$ है। f का प्रतिलोम फलन क्या है?

उत्तर 4:

दिया है कि $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}, x \neq \frac{2}{3}$, इसलिए

$$(fof)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right) = \frac{4\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right)+3}{6\left(\frac{4x+3}{6x-4}\right)-4} = \frac{16x+12+18x-12}{24x+18-24x+16} = \frac{34x}{34} = x$$

$\therefore fof(x) = x$, सभी $x \neq \frac{2}{3}$ के लिए

$\Rightarrow fof = I_x$

अतः, दिया गया फलन f व्युत्क्रमणीय है और फलन f का व्युत्क्रम स्वयं f ही है।

प्रश्न 5:

कारण सहित बतलाइए कि क्या निम्नलिखित फलनों के प्रतिलोम हैं:

(i) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10\}$ जहाँ
$f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$

(ii) $g: \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ जहाँ
$g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$

(iii) $h: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13\}$ जहाँ
$h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

उत्तर 5:

(i) दिया है कि $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10\}$ जहाँ $f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$

फलन f की परिभाषा से स्पष्ट है कि f एक बहुएक फलन है, क्योंकि $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 10$

$\therefore f$ एकैकी नहीं है।

अतः, फलन f के प्रतिलोम का अस्तित्व नहीं है।

(ii) दिया है कि $g: \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ जहाँ $g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$

फलन g की परिभाषा से स्पष्ट है कि g एक बहुएक फलन है, क्योंकि

$g(5) = g(7) = 4$.

$\therefore g$ एकैकी नहीं है।

अतः, फलन g के प्रतिलोम का अस्तित्व नहीं है।

(iii) दिया है कि $h: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13\}$ जहाँ $h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

यहाँ, $h(2) = 7$, $h(3) = 9$, $h(4) = 11$और $h(5) = 13$ है, इसलिए

$\therefore h$ एकैकी है।

यहाँ, सहप्रांत के सभी अवयवों, प्रांत के अद्वितीय अवयव के प्रतिबिंब हैं, इसलिए, h आच्छादक है।

इसप्रकार, h एकैकी तथा आच्छादक है।

अतः, h के प्रतिलोम का अस्तित्व है।

प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए कि $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x+2)}$, द्वारा प्रदत्त फलन एकैकी है। फलन $f: [-1, 1] \rightarrow$ (f का परिसर), का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

(संकेत: $y \in$ परिसर f, के लिए, $[-1, 1]$ के किसी x के अंतर्गत $y = f(x) = \frac{x}{(x+2)}$, अर्थात $x = \frac{2y}{(1-y)}$)

उत्तर 6:

माना $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+2}$ $\Rightarrow xy + 2x = xy + 2y$ $\Rightarrow 2x = 2y$ $\Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी है।

माना $y = f(x) = \frac{x}{(x+2)}, \Rightarrow \; x = \frac{2y}{(1-y)}$ ... (1)

$\Rightarrow \; f(y) = \frac{2y}{(1-y)}$

माना $f(y_1) \; = \; f(y_2) \quad \Rightarrow \frac{2y_1}{(1-y_1)} = \frac{2y_2}{(1-y_2)} \quad \Rightarrow 2y_1 - 2y_1y_2 = 2y_2 - 2y_1y_2 \;\; \Rightarrow 2y_1 = 2y_2 \quad \Rightarrow y_1 = y_2$

$\therefore f$ आच्छादक है।

इसप्रकार, f एकैकी तथा आच्छादक है।

अतः, f के प्रतिलोम का अस्तित्व है।

यहाँ, $y = f(x) = \frac{x}{(x+2)}, \Rightarrow \; x = \frac{2y}{(1-y)}$

माना, $g(y) = \frac{2y}{1-y}$

कि f: $[-1, 1] \to \mathbf{R}$, $g(y) = \frac{2y}{1-y}$, $\; y \neq 1$, द्वारा प्रदत्त फलन है।

अब,

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{2\left(\frac{x}{x+2}\right)}{1-\left(\frac{x}{x+2}\right)} = \frac{2x}{x+2-x} = \frac{2x}{2} = x$$

और

$$(fog)(y) = f\big(g(y)\big) = f\left(\frac{2y}{1-y}\right) = \frac{\frac{2y}{1-y}}{\frac{2y}{1-y}+2} = \frac{2y}{2y+2-2y} = \frac{2y}{2} = y$$

$\therefore gof = x = I_{[-1,1]}$ और $fog = y = I_{f \text{ का परिसर}}$

$\therefore f^{-1} = g \qquad \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}, \quad y \neq 1$

प्रश्न 7:

$f(x) = 4x + 3$ द्वारा प्रदत्त फलन f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

उत्तर 7:

माना $f(x) = f(y) \qquad \Rightarrow 4x + 3 = 4y + 3 \qquad \Rightarrow 4x = 4y \qquad \Rightarrow x = y$

$\therefore f$ एकैकी है।

यहाँ $y \in \mathbf{R}$ के लिए, माना $y = 4x + 3$

$\Rightarrow x = \frac{y-3}{4} \in \mathbf{R}$

इसप्रकार, किसी $y \in \mathbf{R}$ के लिए, $x = \frac{y-3}{4} \in \mathbf{R}$, ताकि

$f(x) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y.$

$\therefore f$ आच्छादक है।

इसप्रकार, f एकैकी तथा आच्छादक है, इसलिए f^{-1} का अस्तित्व है।

माना, फलन $g(x) = \frac{y-3}{4}$, जो g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित है।

यहाँ,

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(4x+3) = \frac{(4x+3)-3}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

और

$$(fog)(y) = f\big(g(y)\big) = f\left(\frac{y-3}{4}\right) = 4\left(\frac{y-3}{4}\right) + 3 = y - 3 + 3 = y$$

$\therefore gof = fog = I_R$

अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम $f^{-1}(y) = g(y) = \frac{y-3}{4}$ है।

प्रश्न 8:

$f(x) = x^2 + 4$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \boldsymbol{R}_+ \to [4, \infty)$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा f का प्रतिलोम f^{-1}, $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$, द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ $\boldsymbol{R}_+$ सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

उत्तर 8:

माना $f(x) = f(y)$ $\Rightarrow x^2 + 4 = y^2 + 4$ $\Rightarrow x^2 = y^2$ $\Rightarrow x = y$ [क्योंकि $x = y \in \boldsymbol{R}_+$]

$\therefore f$ एकैकी है।

किसी $y \in [4, \infty)$ के लिए, माना $y = x^2 + 4$

$\Rightarrow x^2 = y - 4 \geq 0$ [क्योंकि $y \geq 4$]

$\Rightarrow \mathrm{x} = \sqrt{y-4} \geq 0$

इसलिए, किसी $y \in [4, \infty)$ के लिए, $x = \sqrt{y-4} \in \mathrm{R}_+$ का अस्तित्व इसप्रकार है कि

$f(x) = f(\sqrt{y-4}) = (\sqrt{y-4})^2 + 4 = y - 4 + 4 = y$

$\therefore f$ आच्छादक है।

इसप्रकार, f एकैकी तथा आच्छादक है, इसलिए f^{-1} का अस्तित्व है।

माना, फलन $g(x) = \sqrt{y-4}$, जो $g: [4, \infty) \to R_+$ द्वारा परिभाषित है।

अब,

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 4) = \sqrt{(x^2+4) - 4} = \sqrt{x^2} = x$$

और

$$(fog)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y-4}) = (\sqrt{y-4})^2 + 4 = y - 4 + 4 = y$$

$\therefore gof = fog = I_R$

अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम $f^{-1}(y) = g(y) = \sqrt{y-4}$ है।

प्रश्न 9:

$f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: \boldsymbol{R}_+ \to [-5, \infty)$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है तथा $f^{-1}(y) = \left(\frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}\right)$ है।

उत्तर 9:

माना y अन्तराल $[-5, \infty)$ में कोई अवयव है।

माना $y = 9x^2 + 6x - 5$

$\Rightarrow y = (3x+1)^2 - 1 - 5 = (3x+1)^2 - 6$ $\Rightarrow y + 6 = (3x+1)^2$

$\Rightarrow 3x + 1 = \sqrt{y+6}$ [क्योंकि $y \geq -5 \Longrightarrow y + 6 > 0$]

$\Rightarrow x = \frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}$.

$\therefore f$ आच्छादक है।

माना फलन $g(y) = \frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}$ जो $g: [-5, \infty) \to R_+$ द्वारा परिभाषित है। इसलिए

$(gof)x = g(f(x)) = g(9x^2 + 6x - 5) = g((3x+1)^2 - 6)$

$= \sqrt{(3x+1)^2 - 6 + 6} - 1 = \dfrac{3x + 1 - 1}{3} = \dfrac{3x}{3} = x$

और

$$(fog)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right) = \left[3\left(\frac{\sqrt{y+6}-1}{3}\right) + 1\right]^2 - 6 = (\sqrt{y+6})^2 - 6 = y + 6 - 6 = y$$

$\therefore gof = x = I_R$ और $fog = y = I_{f \text{ का परिसर}}$

अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम $f^{-1}(y) = g(y) = \left(\frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}\right)$ है।

प्रश्न 10:

मान लीजिए कि $f: X \rightarrow Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है। सिद्ध कीजिए कि f का प्रतिलोम फलन अद्वितीय है। (संकेत: कल्पना कीजिए कि f के दो प्रतिलोम फलन g_1 तथा g_2 हैं। तब सभी $y \in Y$ के लिए $fog_1(y) = I_Y(y) = fog_2(y)$ है। अब f के एकैकी गुण का प्रयोग कीजिए)

उत्तर 10:

फलन $f: X \rightarrow Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है।
माना, फलन f के दो प्रतिलोम फलन g_1 तथा g_2 हैं। इसलिए
सभी $y \in Y$ के लिए, $fog_1(y) = I_Y(y) = fog_2(y) \quad \Rightarrow f\left(g_1(y)\right) = f\left(g_2(y)\right)$
$\Rightarrow g_1(y) = g_2(y)$ [क्योंकि f व्युत्क्रमणीय है $\Rightarrow$ f एकैकी है]
$\Rightarrow g_1 = g_2$ [क्योंकि g एकैकी है]
अतः, f का प्रतिलोम फलन अद्वितीय है।

प्रश्न 11:

$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$, $f(1) = a, f(2) = b$ तथा $f(3) = c$ द्वारा प्रदत्त फलन f पर विचार कीजिए। f^{-1} ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि $(f^{-1})^{-1} = f$ है।

उत्तर 11:

यहाँ, $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$, $f(1) = a, f(2) = b$ तथा $f(3) = c$ द्वारा प्रदत्त फलन f है।
माना, $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ तथा $g(c) = 3$ द्वारा प्रदत्त कोई फलन g है।

इसलिए,
$$(fog)(a) = f(g(a)) = f(1) = a$$
$$(fog)(b) = f(g(b)) = f(2) = b$$
$$(fog)(c) = f(g(c)) = f(3) = c$$
और
$$(gof)(1) = g(f(1)) = f(a) = 1$$
$$(gof)(2) = g(f(2)) = f(b) = 2$$
$$(gof)(3) = g(f(3)) = f(c) = 3$$

$\therefore gof = I_X$ और $fog = I_Y$, जहाँ, $X = \{1, 2, 3\}$ और $Y = \{a, b, c\}$ है। अतः, f के प्रतिलोम का अस्तित्व है और $f^{-1} = g$ है।
$\therefore f^{-1}: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ इसप्रकार है कि $f^{-1}(a) = 1, f^{-1}(b) = 2, f^{-1}(c) = 3$ है।
अब, f^{-1} प्राप्त करने के लिए, हम g का प्रतिलोम प्राप्त करेंगे।
माना $h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ जो $h(1) = a, h(2) = b, h(3) = c$ द्वारा परिभाषित है।

यहाँ,
$$(goh)(1) = g(h(1)) = g(a) = 1$$
$$(goh)(2) = g(h(2)) = g(b) = 2$$
$$(goh)(3) = g(h(3)) = g(c) = 3$$
और
$$(hog)(a) = h(g(a)) = h(1) = a$$
$$(hog)(b) = h(g(b)) = h(2) = b$$
$$(hog)(c) = h(g(c)) = h(3) = c$$

$\therefore goh = I_X$ और $hog = I_Y$, जहाँ, $X = \{1, 2, 3\}$ और $Y = \{a, b, c\}$ है।
अतः, फलन g व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम $g^{-1} = h \Rightarrow (f^{-1})^{-1} = h$ है। यहाँ, $h = f$ भी है। अतः, $(f^{-1})^{-1} = f$ है।

प्रश्न 12:

मान लीजिए कि $f: X \rightarrow Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन हैं सिद्ध कीजिए कि f^{-1} का प्रतिलोम f, है अर्थात $(f^{-1})^{-1} = f$ है।

उत्तर 12:

माना $f: X \rightarrow Y$ एक व्युत्क्रमणीय फलन हैं, इसलिए
एक फलन $g: Y \rightarrow X$ का अस्तित्व कुछ इस प्रकार होगा कि $gof = I_X$ और $fog = I_Y$ हो।
यहाँ, $f^{-1} = g$, इसलिए $gof = I_X$ और $fog = I_Y \quad \Rightarrow f^{-1}of = I_X$ और $fof^{-1} = I_Y$
अतः, फलन $f^{-1}: Y \rightarrow X$ व्युत्क्रमणीय है और इसका व्युत्क्रम $f^{-1} = f \Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$ है।

प्रश्न 13:

यदि $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, द्वारा प्रदत्त फलन है, तो $fof(x)$ बराबर है:

(A) $\frac{1}{x^3}$ (B) x^3 (C) x (D) $(3 - x^3)$

उत्तर 13:

दिया है: फलन $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ जो $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित है।

$\therefore fof(x) = f(f(x)) = f\left((3 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right) = \left[3 - \left((3 - x^3)^{\frac{1}{3}}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}$

$= [3 - (3 - x^3)]^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$

$\therefore fof(x) = x$

अतः, विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 14:

मान लीजिए कि $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f: \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to \boldsymbol{R}$ है। f का प्रतिलोम, अर्थात प्रतिचित्र g: परिसर $f \to \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$, निम्नलिखित में से किसके द्वारा प्राप्त होगा:

(A) $g(y) = \frac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$

(C) $g(y) = \frac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \frac{3y}{4-3y}$

उत्तर 14:

दिया है: फलन $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ जो $f: \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित है।

माना y, f के परिसर में कोई अवयव है।

तब, $x \in \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ कोई अवयव इसप्रकार है कि $y = f(x)$ है।

$\Rightarrow y = \dfrac{4x}{3x + 4}$

$\Rightarrow 3xy + 4y = 4x$

$\Rightarrow x(4 - 3y) = 4y$

$\Rightarrow x = \dfrac{4y}{4 - 3y}$

यहाँ, माना फलन $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$ जो $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ द्वारा परिभाषित है।

अब,

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{4x}{3x+4}\right) = \frac{4\left(\frac{4x}{3x+4}\right)}{4 - 3\left(\frac{4x}{3x+4}\right)} = \frac{16x}{12x + 16 - 12x} = \frac{16x}{16} = x$$

और

$$fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{4y}{4-3y}\right) = \frac{4\left(\frac{4y}{4-3y}\right)}{3\left(\frac{4y}{4-3y}\right) + 4} = \frac{16y}{12y + 16 - 12y} = \frac{16y}{16} = y$$

$\therefore gof = I_{R-\left\{-\frac{4}{3}\right\}}$ और $fog = I_{f \text{ का परिसर}}$

इसप्रकार, f का प्रतिलोम g है अर्थात $f^{-1} = g$ है।

अतः, f का प्रतिलोम, अर्थात प्रतिचित्र g: परिसर $f \to \boldsymbol{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$, जहाँ $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$ है।

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ – 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 1.4

प्रश्न 1:

निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित प्रत्येक संक्रिया * से एक द्विआधारी संक्रिया प्राप्त होती है या नहीं। उस दशा में जब * एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, औचित्य भी बतलाइए।

(i) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित संक्रिया *

(ii) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = ab$ द्वारा परिभाषित संक्रिया *

(iii) $\mathbf{R}$ में, संक्रिया *, $a * b = ab^2$ द्वारा परिभाषित

(iv) $\mathbf{Z}^+$ में, संक्रिया *, $a * b = |a - b|$ द्वारा परिभाषित

(v) $\mathbf{Z}^+$ में, संक्रिया *, $a * b = a$ द्वारा परिभाषित

उत्तर 1:

(i) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित संक्रिया *

ये एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है, क्योंकि (1, 2) के लिए संक्रिया * से $1 * 2 = 1 - 2 = -1 \notin \mathbf{Z}^+$.

(ii) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = ab$ द्वारा परिभाषित संक्रिया *

हम जानते हैं कि दो धनात्मक $a, b \in \mathbf{Z}^+$ का गुणनफल ab सदैव धनात्मक होगा और $\mathbf{Z}^+$ में निहित होगा।

अर्थात संक्रिया * से प्रत्येक युग्म (a, b) के लिए $\mathbf{Z}^+$ में $a * b = ab$ है।

इसलिए, * एक द्विआधारी संक्रिया है।

(iii) $\mathbf{R}$ में, संक्रिया *, $a * b = ab^2$ द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं $a, b \in \mathbf{R}$ के लिए ab^2 भी वास्तविक होगा अर्थात $ab^2 \in \mathbf{R}$.

अतः, संक्रिया * से प्रत्येक युग्म (a, b) के लिए $\mathbf{R}$ में $a * b = ab^2$ $\mathbf{R}$ है।

इसलिए, * एक द्विआधारी संक्रिया है।

(iv) $\mathbf{Z}^+$ में, संक्रिया *, $a * b = |a - b|$ द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि दो धनात्मक $a, b \in \mathbf{Z}^+$ के लिए $|a - b|$ सदैव धनात्मक होगा और $\mathbf{Z}^+$ में निहित होगा।

अर्थात संक्रिया * से प्रत्येक युग्म (a, b) के लिए $\mathbf{Z}^+$ में $a * b = |a - b|$ है।

इसलिए, * एक द्विआधारी संक्रिया है।

(v) $\mathbf{Z}^+$ में, संक्रिया *, $a * b = a$ द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि दो धनात्मक $a, b \in \mathbf{Z}^+$ के लिए a सदैव धनात्मक होगा और $\mathbf{Z}^+$ में निहित होगा।

अर्थात संक्रिया * से प्रत्येक युग्म (a, b) के लिए $\mathbf{Z}^+$ में $a * b = a$ है।

इसलिए, * एक द्विआधारी संक्रिया है।

प्रश्न 2:

निम्नलिखित परिभाषित प्रत्येक द्विआधारी संक्रिया * के लिए निर्धारित कीजिए कि क्या * द्विआधारी क्रमविनिमय है तथा क्या * साहचर्य है।

(i) $\mathbf{Z}$ में, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित

(ii) $\mathbf{Q}$ में, $a * b = ab + 1$ द्वारा परिभाषित

(iii) $\mathbf{Q}$ में, $a * b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित

(iv) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = 2^{ab}$ द्वारा परिभाषित

(v) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = a^b$ द्वारा परिभाषित

(vi) $\mathbf{R} - \{-1\}$ में, $a * b = \frac{a}{b+1}$ द्वारा परिभाषित

उत्तर 2:

(i) $\mathbf{Z}$ में, $a * b = a - b$ द्वारा परिभाषित

यहाँ, $1 * 2 = 1 - 2 = -1$ और $2 * 1 = 2 - 1 = 1$.

$\therefore 1 * 2 \neq 2 * 1$, जहाँ $1, 2 \in \mathbf{Z}$. अतः, द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

और अब $(1 * 2) * 3 = (1 - 2) * 3 = -1 * 3 = -1 - 3 = -4$

तथा $1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3) = 1 * -1 = 1 - (-1) = 2$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{Z}$ अतः, द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(ii) $\mathbf{Q}$ में, $a * b = ab + 1$ द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि $ab = ba$ सभी $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $\Rightarrow ab + 1 = ba + 1$ for all $a, b \in \mathbf{Q}$

$\Rightarrow a * b = a * b$ for all $a, b \in \mathbf{Q}$

अतः, द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमय है।

यहाँ, (1 * 2) * 3 = (1 × 2 + 1) * 3 = 3 * 3 = 3 × 3 + 1 = 10
तथा 1 * (2 * 3) = 1 * (2 × 3 + 1) = 1 * 7 = 1 × 7 + 1 = 8
∴ (1 * 2) * 3 ≠ 1 * (2 * 3), जहाँ 1, 2, 3 ∈ **Q**, अतः, द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(iii) Q में, $a * b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि $ab = ba$ सभी $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए $\Rightarrow \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2}$ सभी $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए

$\Rightarrow a * b = b * a$ सभी $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए , अतः, द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमय है।
सभी $a, b, c \in \mathbf{Q}$ के लिए,

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{2}\right) * c = \frac{\left(\frac{ab}{2}\right)c}{2} = \frac{abc}{4}$$

और

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{2}\right) = \frac{a\left(\frac{bc}{2}\right)}{2} = \frac{abc}{4}$$

∴ $(a * b) * c = a * (b * c)$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{Q}$, अतः, द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य है।

(iv) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = 2^{ab}$ द्वारा परिभाषित

हम जानते हैं कि $ab = ba$ सभी $a, b \in \mathbf{Z}^+$ के लिए , $\Rightarrow 2^{ab} = 2^{ba}$ सभी $a, b \in \mathbf{Z}^+$ के लिए
$\Rightarrow a * b = b * a$ सभी $a, b \in \mathbf{Z}^+$ के लिए, अतः, द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमय है।
यहाँ, $(1 * 2) * 3 = 2^{1\times2} * 3 = 4 * 3 = 2^{4\times3} = 2^{12}$
और $1 * (2 * 3) = 1 * 2^{2\times3} = 1 * 2^6 = 1 * 64 = 2^{1\times64} = 2^{64}$
∴ (1 * 2) * 3 ≠ 1 * (2 * 3), जहाँ 1, 2, 3 ∈ $\mathbf{Z}^+$, अतः, द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(v) $\mathbf{Z}^+$ में, $a * b = a^b$ द्वारा परिभाषित

यहाँ, $1 * 2 = 1^2 = 1$ और $2 * 1 = 2^1 = 2$
∴ 1 * 2 ≠ 2 * 1, जहाँ 1, 2 ∈ $\mathbf{Z}^+$, अतः, द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।
अब, $(2 * 3) * 4 = 2^3 * 4 = 8 * 4 = 8^4 = 2^{12}$ और $2 * (3 * 4) = 2 * 3^4 = 2 * 81 = 2^{81}$
∴ (2 * 3) * 4 ≠ 2 * (3 * 4), जहाँ 2, 3, 4 ∈ $\mathbf{Z}^+$,
अतः, द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(vi) R – {–1} में, $a * b = \frac{a}{b+1}$ द्वारा परिभाषित

यहाँ, $1 * 2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ और $2 * 1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$
∴1 * 2 ≠ 2 * 1, जहाँ 1, 2 ∈ **R** – {–1}, अतः, द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।
अब,

$$(1 * 2) * 3 = \frac{1}{2+1} * 3 = \frac{1}{3} * 3 = \frac{\frac{1}{3}}{3+1} = \frac{1}{12}$$

और

$$1 * (2 * 3) = 1 * \frac{2}{3+1} = 1 * \frac{2}{4} = 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

∴ (1 * 2) * 3 ≠ 1 * (2 * 3), जहाँ 1, 2, 3 ∈ **R** – {–1}, अतः, द्विआधारी संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

प्रश्न 3:

समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में $a \wedge b$ = निम्नतम $\{a, b\}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया पर विचार कीजिए। संक्रिया ∧ के लिए संक्रिया सरणी लिखिए।

उत्तर 3:

दिया है: समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में $a \wedge b$ = निम्नतम $\{a, b\}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है।
इसलिए, संक्रिया ∧ के लिए संक्रिया सरणी निम्नलिखित है:

∧	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

प्रश्न 4:

समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में, निम्नलिखित संक्रिया सरणी द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया * पर विचार कीजिए तथा

(i) (2 * 3) * 4 तथा 2 * (3 * 4) का परिकलन कीजिए **(ii)** क्या * क्रमविनिमय है?

(iii) (2 * 3) * (4 * 5) का परिकलन कीजिए। (संकेत: निम्न सरणी का प्रयोग कीजिए।)

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

उत्तर 4:

(i) (2 * 3) * 4 = 1 * 4 = 1 और 2 * (3 * 4) = 2 * 1 = 1

(ii) सरणी में प्रत्येक $a, b \in$ {1, 2, 3, 4, 5} के लिए, $a * b = b * a$ है, अतः, द्विआधारी संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

(iii) (2 * 3) = 1 और (4 * 5) = 1, ∴ (2 * 3) * (4 * 5) = 1 * 1 = 1

प्रश्न 5:

मान लीजिए कि समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में एक द्विआधारी संक्रिया *′, $a *' b = a$ और b का H.C.F. द्वारा परिभाषित है। क्या संक्रिया *′ उपर्युक्त प्रश्न 4 में परिभाषित संक्रिया * के समान है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 5:

दिया है: समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में एक द्विआधारी संक्रिया *′, $a *' b = a$ और b का H.C.F. द्वारा परिभाषित है।

इसलिए, संक्रिया *′ के लिए संक्रिया सरणी निम्नलिखित है:

*′	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

उपरोक्त संक्रिया सारणी से यह स्पष्ट है कि संक्रिया * और संक्रिया *′ दोनों का समान हैं।

अतः, संक्रिया *′ और संक्रिया * एक ही हैं।

प्रश्न 6:

मान लीजिए कि **N** में एक द्विआधारी संक्रिया *, $a * b = a$ तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:

(i) 5 * 7, 20 * 16 **(ii)** क्या संक्रिया * क्रमविनिमय है?

(iii) क्या * साहचर्य है? **(iv)** **N** में * का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए

(v) **N** के कौन से अवयव * के लिए व्युत्क्रमणीय हैं?

उत्तर 6:

दिया है: **N** में एक द्विआधारी संक्रिया *, $a * b = a$ तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित है।

(i) 5 * 7 = 5 और 7 का L.C.M. = 35, तथा 20 * 16 = 20 और 16 का L.C.M. = 80

(ii) हम जानते हैं कि a और b का L.C.M. = b और a का L.C.M., सभी $a, b \in \mathbf{N}$ के लिए।
$\therefore a * b = b * a$
अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।
(iii) सभी $a, b, c \in \mathbf{N}$ के लिए, $(a * b) * c$ = (a और b का L.C.M) * c = a, b और c का L.C.M
$a * (b * c) = a *$ (LCM of b और c) = a, b और c का L.C.M
$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$
अतः, संक्रिया * साहचर्य है।
(iv) हम जानते हैं कि a और 1 का L.C.M = a = 1 और a का L.C.M, सभी $a \in \mathbf{N}$ के लिए
$\Rightarrow a * 1 = a = 1 * a$, सभी $a \in \mathbf{N}$ के लिए
अतः, 1, **N** में * का तत्समक अवयव है।
(v) यदि **N** का कोई अवयव a, * के लिए व्युत्क्रमणीय है तो **N** में एक अवयव b अवश्य होगा ताकि
$a * b = e = b * a$. यहाँ, $e = 1$
अर्थात a और b का L.C.M = 1 = b और a का L.C.M, यह तभी संभव है यदि a और b दोनों समान हों और 1 के बराबर हों।
अतः, केवल अवयव 1 ही **N** में * के लिए व्युत्क्रमणीय है।

प्रश्न 7:

क्या समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में $a * b = a$ तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित * एक द्विआधारी संक्रिया है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 7:

दिया है: समुच्चय {1, 2, 3, 4, 5} में $a * b = a$ तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित * एक संक्रिया है।
इसलिए, संक्रिया * के लिए संक्रिया सरणी निम्नलिखित है:

*	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	6	4	10
3	3	6	3	12	15
4	4	4	12	4	20
5	5	10	15	20	5

उपरोक्त सरणी से यह स्पष्ट है कि
$3 * 2 = 2 * 3 = 6 \notin A$, $5 * 2 = 2 * 5 = 10 \notin A$, $3 * 4 = 4 * 3 = 12 \notin A$,
$3 * 5 = 5 * 3 = 15 \notin A$, $4 * 5 = 5 * 4 = 20 \notin A$
अतः, सम्यच्च्य {1, 2, 3, 4, 5} में $a * b = a$ तथा b का L.C.M. द्वारा परिभाषित संक्रिया * एक द्विआधारी संक्रिया नहीं है।

प्रश्न 8:

मान लीजिए कि **N** में *, $a * b = a$ तथा b का H.C.F. द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है। क्या * क्रमविनिमय है? क्या * साहचर्य है? क्या **N** में इस द्विआधारी संक्रिया के तत्समक का अस्तित्व है?

उत्तर 8:

दिया है: **N** में *, $a * b = a$ तथा b का H.C.F. द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया है।
हम जानते हैं कि a और b का H.C.F. = b और a का H.C.F., सभी $a, b \in \mathbf{N}$ के लिए
$\therefore a * b = b * a$, अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।
सभी $a, b, c \in \mathbf{N}$ के लिए, $(a * b) * c$ = (a और b का H.C.F.) * c = a, b और c का H.C.F.
तथा $a * (b * c) = a *$(b और c का H.C.F.) = a, b और c का H.C.F.
$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$, अतः, संक्रिया * साहचर्य है।
अब, कोई अवयव $e \in \mathbf{N}$, संक्रिया * में तत्समक होगा यदि $a * e = a = e * a$, सभी $a \in \mathbf{N}$ के लिए
लेकिन ये संबंध किसी भी $a \in \mathbf{N}$ के लिए सत्य नहीं है।
अतः, **N** में इस द्विआधारी संक्रिया * के तत्समक का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 9:

मान लीजिए कि परिमेय संख्याओं के समुच्चय **Q** में निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित * एक द्विआधारी संक्रिया है:

(i) $a * b = a - b$ **(ii)** $a * b = a^2 + b^2$ **(iii)** $a * b = a + ab$

(iv) $a * b = (a - b)^2$ **(v)** $a * b = \frac{ab}{4}$ **(vi)** $a * b = ab^2$

ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन सी संक्रियाएँ क्रमविनिमय हैं और कौन सी साहचर्य हैं।

उत्तर 9:

(i) **Q** में, संक्रिया *, $a * b = a - b$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

और

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6}$$

$\therefore \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$, जहाँ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \boldsymbol{Q}$

अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

यह स्पष्ट है कि

$$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left(\frac{3-2}{6}\right) * \frac{1}{4} = \frac{1}{6} * \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = \frac{-1}{12}$$

और

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left(\frac{4-3}{12}\right) = \frac{1}{2} * \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12}$$

$\therefore \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right)$, जहाँ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in \boldsymbol{Q}$

अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(ii) **Q** में, संक्रिया *, $a * b = a^2 + b^2$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

सभी $a, b \in$ **Q** के लिए, $a * b = a^2 + b^2 = b^2 + a^2 = b * a$, $\therefore a * b = b * a$, अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।

अब $(1 * 2) * 3 = (1^2 + 2^2) * 3 = (1 + 4) * 3 = 5 * 3 = 5^2 + 3^2 = 34$

और $1 * (2 * 3) = 1 * (2^2 + 3^2) = 1 * (4 + 9) = 1 * 13 = 1^2 + 13^2 = 170$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in$ **Q**, अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(iii) **Q** में, संक्रिया *, $a * b = a + ab$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

यहाँ, $1 * 2 = 1 + 1\times2 = 1 + 2 = 3$ और $2 * 1 = 2 + 2\times1 = 2 + 2 = 4$

$\therefore 1 * 2 \neq 2 * 1$, जहाँ $1, 2 \in$ **Q**, अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

अब, $(1 * 2) * 3 = (1 + 1\times2) * 3 = (1 + 2) * 3 = 3 * 3 = 3 + 3\times3 = 3 + 9 = 12$

और $1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 2\times3) = 1 * (2 + 6) = 1 * 8 = 1 + 1\times8 = 1 + 8 = 9$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in$ **Q**,

अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(iv) **Q** में, संक्रिया *, $a * b = (a - b)^2$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

सभी $a, b \in$ **Q** के लिए, $a * b = (a - b)^2$ तथा $b * a = (b - a)^2 = [-(a - b)]^2 = (a - b)^2$

$\therefore a * b = b * a$, अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।

यहाँ $(1 * 2) * 3 = (1 - 2)^2 * 3 = (-1)^2 * 3 = 1 * 3 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$

और $1 * (2 * 3) = 1 * (2 - 3)^2 = 1 * (-1)^2 = 1 * 1 = (1 - 1)^2 = 0$

$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in$ **Q**

अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

(v) **Q** में, संक्रिया *, $a*b = \frac{ab}{4}$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है, इसलिए

सभी $a, b \in \mathbf{Q}$ के लिए, $a * b = \frac{ab}{4} = \frac{ba}{4} = b * a$

$\therefore a * b = b * a$

अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।

अवयवों $a, b, c \in \mathbf{Q}$ के लिए,

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{4}\right) * c = \frac{\left(\frac{ab}{4}\right).c}{4} = \frac{abc}{16}$$

और

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{4}\right) = \frac{a.\left(\frac{bc}{4}\right)}{4} = \frac{abc}{16}$$

$\therefore (a * b) * c = a * (b * c)$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{Q}$

अतः, संक्रिया * साहचर्य है।

(vi) **Q** में, संक्रिया *, $a * b = ab^2$ से परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है,

यहाँ

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

और

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$\therefore \frac{1}{2} * \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$, जहाँ $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3} \in \mathbf{Q}$

अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय नहीं है।

अब

$$\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] * \frac{1}{4} = \frac{1}{18} * \frac{1}{4} = \frac{1}{18}.\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{18 \times 16} = \frac{1}{288}$$

और

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} * \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{2} * \frac{1}{48} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{48}\right)^2 = \frac{1}{2 \times 2304} = \frac{1}{4608}$$

$\therefore \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} * \left(\frac{1}{3} * \frac{1}{4}\right)$, जहाँ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in \boldsymbol{Q}$

अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।

अतः, (ii), (iv), (v) में परिभाषित संक्रियाएँ क्रम्विनिमय हैं और (v) में परिभाषित संक्रिया साहचर्य है।

प्रश्न 10:

प्रश्न 9 में दी गई संक्रियाओं में किसी का तत्समक है, वह बतलाइए।

उत्तर 10:

कोई अवयव $e \in \mathbf{Q}$, संक्रिया * में एक तत्समक अवयव होता है यदि, $a * e = a = e * a$, सभी $a \in \mathbf{Q}$ के लिए

परन्तु ऊपर दी गई सभी संक्रियाओं के लिए, अवयव $e \in \mathbf{Q}$ का अस्तित्व नहीं है जो तत्समक की स्थिति को संतुष्ट कर सके।

अतः, ऊपर दी है किसी भी संक्रिया में तत्समक नहीं है।

प्रश्न 11:

मान लीजिए कि $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ है तथा A में $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है। सिद्ध कीजिए कि * क्रमविनियम तथा साहचर्य है। A में * का तत्समक अवयव, यदि कोई है, तो ज्ञात कीजिए।

उत्तर 11:

दिया है: A = $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ है तथा A में $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ द्वारा परिभाषित एक द्विआधारी संक्रिया है।
माना $(a, b), (c, d) \in A$ जहाँ $a, b, c, d \in \mathbf{N}$, इसलिए $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$
तथा $(c, d) * (a, b) = (c + a, d + b) = (a + c, b + d)$ [प्राकृत संख्याओं का योग क्रम्विनिमय होता है]
$\therefore (a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$
अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।
अब, माना $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$ जहाँ $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{N}$
$[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a + c, b + d) * (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$
और $(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)$
$\therefore [(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a, b) * [(c, d) * (e, f)]$
अतः, संक्रिया * साहचर्य है।
माना कोई अवयव $e = (e_1, e_2) \in A$ संक्रिया * में तत्समक अवयव है, इसलिए
$a * e = a = e * a$ सभी $a = (a_1, a_2) \in A$ के लिए अर्थात $(a_1 + e_1, a_2 + e_2) = (a_1, a_2) = (e_1 + a_1, e_2 + a_2)$
$\Rightarrow a_1 + e_1 = a_1 \quad \Rightarrow e_1 = 0 \notin \mathbf{N}$ तथा $a_2 + e_2 = a_2 \quad \Rightarrow e_2 = 0 \notin \mathbf{N}$
जो A के किसी भी अवयव के लिए सत्य नहीं है क्योंकि A = $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ और 0 प्राकृत संख्या नहीं होती है।
इसलिए, संक्रिया * में कोई तत्समक अवयव नहीं है।

प्रश्न 12:

बतलाइए कि क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य हैं। औचित्य भी बताइए।
(i) समुच्चय **N** में किसी भी स्वेच्छ द्विआधारी संक्रिया * के लिए $a * a = a, \forall a \in \mathbf{N}$
(ii) यदि **N** में * एक क्रमविनियम द्विआधारी संक्रिया है, तो $a * (b * c) = (c * b) * a$

उत्तर 12:

(i) माना संक्रिया *, **N** में इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = a + b \; \forall a, b \in \mathbf{N}$
तब, यदि $b = a = 3$ हो तो, संक्रिया से $3 * 3 = 3 + 3 = 6 \neq 3$, अतः, कथन (i) असत्य है।
(ii) R.H.S. = $(c * b) * a$
$= (b * c) * a$ [क्योंकि संक्रिया * क्रमविनिमय है]
$= a * (b * c)$ = L.H.S. [क्योंकि संक्रिया * क्रमविनिमय है]
$\therefore a * (b * c) = (c * b) * a$, अतः, कथन (ii) सत्य है।

प्रश्न 13:

$a * b = a^3 + b^3$ प्रकार से परिभाषित **N** में एक द्विआधारी संक्रिया * पर विचार कीजिए। अब निम्नलिखित में से सही उत्तर का चयन कीजिए

(A) * साहचर्य तथा क्रमविनियम दोनों है
(B) * क्रमविनियम है किन्तु साहचर्य नहीं है
(C) * साहचर्य है किन्तु क्रमविनियम नहीं है
(D) * न तो क्रमविनियम है और न साहचर्य है

उत्तर 13:

अवयव $a, b, \in \mathbf{N}$ के लिए,
$a * b = a^3 + b^3 = b^3 + a^3 = b * a$ [प्राकृत संख्याओं का योग क्रमविनिमय होता है]
अतः, संक्रिया * क्रमविनिमय है।
यहाँ, $(1 * 2) * 3 = (1^3 + 2^3) * 3 = (1 + 8) * 3 = 9 * 3 = 9^3 + 3^3 = 729 + 27 = 756$
और $1 * (2 * 3) = 1 * (2^3 + 3^3) = 1 * (8 + 27) = 1 * 35 = 1^3 + 35^3 = 1 + 42875 = 42876$
$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$, जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{N}$
इसलिए, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।
अतः, संक्रिया * क्रमविनियम है किन्तु साहचर्य नहीं है।
इसलिए विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ – 1) (संबंध एवं फलन)

(कक्षा 12)

विविध प्रश्नावली 1

प्रश्न 1:

मान लीजिए कि f: **R** → **R**, $f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है। एक ऐसा फलन g: **R** → **R** ज्ञात कीजिए जिसके लिए $g \ o \ f \ = \ f \ o \ g = I_R$ हो।

उत्तर 1:

दिया है: f: **R** → **R**, $f(x) = 10x + 7$ द्वारा परिभाषित फलन है।

माना $f(x) = f(y)$, जहाँ $x, y \in$ **R**. $\Rightarrow 10x + 7 = 10y + 7$ $\Rightarrow x = y$

∴ फलन f एकैकी है।

सभी $y \in R$ के लिए, माना $y = 10x + 7$ $\Rightarrow x = \frac{y-7}{10} \in \boldsymbol{R}$

इसलिए, प्रत्येक $y \in$ **R**, $x = \frac{y-7}{10} \in \boldsymbol{R}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$f(x) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$

∴ फलन f आच्छादक है।

इसप्रकार, फलन f एकैकी तथा आच्छादक है। अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है।

अब, माना g: **R** → **R** इस प्रकार है कि $g(y) = \frac{y-7}{10}$, इसलिए

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(10x + 7) = \frac{(10x + 7) - 7}{10} = \frac{10x}{10} = x$$

और

$$fog(y) = f\big(g(y)\big) = f\left(\frac{y-7}{10}\right) = 10\left(\frac{y-7}{10}\right) + 7 = y - 7 + 7 = y$$

∴ $g \ o \ f \ = \ I_R$ तथा $f \ o \ g = I_R$.

अतः, अभीष्ट फलन g: **R** → **R**, $g(y) = \frac{y-7}{10}$ से परिभाषित है।

प्रश्न 2:

मान लीजिए कि f: W → W, $f(n) = n - 1$, यदि n विषम है तथा $f(n) = n + 1$, यदि n सम है, द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। यहाँ W समस्त पूर्णांकों का समुच्चय है।

उत्तर 2:

दिया है:

फलन f: W → W, $f(n) = \begin{cases} n - 1, \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ n + 1, \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

माना $f(n) = f(m)$, तब, निम्नलिखित स्थितियां हो सकती हैं:

यदि n विषम हो और m एक सम पूर्णांक हो, तब, $f(n) = f(m) \Rightarrow n - 1 = m + 1 \Rightarrow n - m = 2$

जो संभव नहीं है, क्योंकि एक सम पूर्णांक और एक विषम पूर्णांक का अंतर कभी सम नहीं हो सकता है।

इसी प्रकार यदि n सम हो और m एक विषम पूर्णांक हो तो भी स्थिति संभव नहीं होगी।

यदि दोनों n और m विषम हों, तो, $f(n) = f(m)$ $\Rightarrow n - 1 = m - 1$ $\Rightarrow n = m$

यदि दोनों n और m सम हों, तो, $f(n) = f(m)$ $\Rightarrow n + 1 = m + 1$ $\Rightarrow n = m$

∴ फलन f एकैकी है।

यहाँ, सहप्रांत **N** में, प्रत्येक अवयव $2r + 1$ के लिए, अवयव $2r$ प्रांत **N** में है तथा सहप्रांत **N** में, प्रत्येक अवयव $2r$ के लिए अवयव $2r + 1$ प्रांत **N** में है।

∴ फलन f आच्छादक है।

अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय फलन है।

माना g: W → W, $g(m) = \begin{cases} m + 1, \text{ यदि } m \text{ सम है} \\ m - 1, \text{ यदि } m \text{ विषम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

जब, m विषम है, तो $gof(m) = g\big(f(m)\big) = g(m-1) = m - 1 + 1 = m$ और

जब m सम है, तो $gof(m) = g(f(m)) = g(m+1) = m+1-1 = m$
इसीप्रकार, जब m विषम है, तो $fog(m) = f(g(m)) = f(m-1) = m-1+1 = m$ और
जब m सम है, तो $fog(m) = f(g(m)) = f(m+1) = m+1-1 = m$
$\therefore gof = \mathrm{I_W}$ और $fog = \mathrm{I_W}$
अतः, फलन f व्युत्क्रमणीय है और f का व्युत्क्रम $f^{-1} = g$ है, जोकि f के समान है। इसप्रकार, फलन f का व्युत्क्रम स्वयं f ही है।

प्रश्न 3:

यदि f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ जहाँ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है तो $f(f(x))$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है: f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ जहाँ $f(x) = x^2 - 3x + 2$ द्वारा परिभाषित है। इसलिए
$f(f(x)) = f(x^2-3x+2) = (x^2-3x+2)^2 - 3(x^2-3x+2) + 2$
$= (x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 12x + 4x^2) + (-3x^2 + 9x - 6) + 2$
$= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

प्रश्न 4:

सिद्ध कीजिए कि f: $\mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R}: -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है।

उत्तर 4:

दिया है: f: $\mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R}: -1 < x < 1\}$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन है।
माना $f(x) = f(y)$, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$.
$\Rightarrow \dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{y}{1+|y|}$
यहाँ, कई स्थितियां संभव हैं, जैसे कि यदि x धनात्मक हो तथा y ऋणात्मक हो। तब
$\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1-y} \Rightarrow 2xy = x - y$
क्योंकि, x धनात्मक है और y ऋणात्मक है, इसलिए $x > y \Rightarrow x - y > 0$, लेकिन, $2xy$ भी ऋणात्मक होगा।
अतः, $2xy \neq x - y$
इसीप्रकार, x ऋणात्मक तथा y धनात्मक भी संभव नहीं है।
अब, यदि x और y दोनों धनात्मक हैं। तो
$f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1+y} \Rightarrow x + xy = y + xy \Rightarrow x = y$
तथा यदि x और y दोनों ही ऋणात्मक हों, तो
$f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{y}{1-y} \Rightarrow x - xy = y - xy \Rightarrow x = y$
$\therefore$ फलन f ऐकैकी है।
अब, माना $y \in \mathbf{R}$ इस प्रकार है कि $-1 < y < 1$, यदि y ऋणात्मक है, तो $x = \frac{y}{1+y} \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1+y}\right)}{1+\left|\frac{y}{1+y}\right|} = \frac{\frac{y}{1+y}}{1+\left(\frac{-y}{1+y}\right)} = \frac{y}{1+y-y} = y$$

और यदि y धनात्मक है, तो $x = \frac{y}{1-y} \in \mathbf{R}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1+\left|\frac{y}{1-y}\right|} = \frac{\frac{y}{1-y}}{1+\left(\frac{y}{1-y}\right)} = \frac{y}{1-y+y} = y$$

$\therefore$ फलन f आच्छादक है।
अतः, फलन f एकैकी तथा आच्छादक है।

प्रश्न 5:
सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त फलन f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ एकैकी है।

उत्तर 5:
दिया है: $f(x) = x^3$ द्वारा प्रदत्त एक फलन f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ है।
माना $f(x) = f(y)$, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$. $\Rightarrow x^3 = y^3$ ... (1)
अब, हमें $x = y$ सिद्ध करना है। माना $x \neq y$, तब उनके घन भी बराबर नहीं होंगे। $\Rightarrow x^3 \neq y^3$
लेकिन ये समीकरण (1) का विरोधाभास है। $\therefore x = y$, अतः, फलन f एकैकी है।

प्रश्न 6:
दो फलनों f: $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ तथा g: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ के उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि, $g \circ f$ एकैकी है परन्तु g एकैकी नहीं है।
(संकेत: $f(x) = x$ तथा $g(x) = |x|$ पर विचार कीजिए)

उत्तर 6:
माना फलन f: $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ जो $f(x) = x$ द्वारा परिभाषित है तथा फलन g: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ जो $g(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित है।
सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि g एकैकी नहीं है।
यहाँ, $g(-1) = |-1| = 1$ तथा $g(1) = |1| = 1$
$\therefore g(-1) = g(1)$, लेकिन $-1 \neq 1$. $\therefore g$ एकैकी नहीं है।
अब, gof: $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ के लिए $gof(x) = g(f(x)) = g(x) = |x|$.
माना $x, y \in \mathbf{N}$ इस प्रकार हैं कि $gof(x) = gof(y)$ $\Rightarrow |x| = |y|$
क्योंकि $x, y \in \mathbf{N}$, अतः, दोनों धनात्मक होंगे। $\therefore |x| = |y| \Rightarrow x = y$
अतः, gof एकैकी है।

प्रश्न 7:
दो फलनों f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ तथा g: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ के उदाहरण दीजिए, जो इस प्रकार हों कि $g\, of$ आच्छादक है किन्तु f आच्छादक नहीं है।
(संकेत: $f(x) = x + 1$ तथा $g(x) = \begin{cases} x-1, & if\ x > 1 \\ 1, & if\ x = 1 \end{cases}$ पर विचार कीजिए।)

उत्तर 7:
माना, फलन f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ जहाँ $f(x) = x + 1$ तथा फलन g: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ जहाँ $g(x) = \begin{cases} x-1, & if\ x > 1 \\ 1, & if\ x = 1 \end{cases}$ है।
सबसे पहले हम सिद्ध करेंगे कि g आच्छादक नहीं है।
यहाँ, सहप्रांत $\mathbf{N}$ में अवयव 1 के लिए प्रांत $\mathbf{N}$ में किसी भी अवयव का अस्तित्व नहीं है। $\therefore f$ आच्छादक नहीं है।
अब, gof: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ के लिए, $gof(x) = g(f(x)) = g(x+1) = x + 1 - 1 = x$ $[x \in N \Rightarrow x + 1 > 1]$
इसप्रकार, ये स्पष्ट हिया कि $y \in \mathbf{N}$ के लिए, $x = y \in \mathbf{N}$ ताकि $gof(x) = y$ हो। अतः, gof आच्छादक है।

प्रश्न 8:
एक अरिक्त समुच्चय X दिया हुआ है। $P(X)$ जो कि X के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है, पर विचार कीजिए। निम्नलिखित तरह से $P(X)$ में एक संबंध R परिभाषित कीजिए:
$P(X)$ में उपसमुच्चयों A, B के लिए, ARB, यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। क्या R, $P(X)$ में एक तुल्यता संभंध है? अपने उत्तर का औचित्य भी लिखिए।

उत्तर 8:
क्योंकि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का ही उपसमुच्चय होता है, इसलिए ARA सभी $A \in P(X)$ के लिए। अतः, R स्वतुल्य है।
माना $ARB \Rightarrow A \subset B$ परन्तु ये आवश्यक नहीं है कि $B \subset A$ भी हो। जैसे: यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{1, 2, 3\}$ हो।
$\therefore$ R सममित नहीं है।
अब, यदि ARB तथा BRC है तो $A \subset B$ और $B \subset C$. $\Rightarrow A \subset C$ $\Rightarrow ARC$
$\therefore$ R संक्रामक है। अतः, R एक तुल्यता संबंध नहीं है क्योंकि R स्वतुल्य, संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है।

प्रश्न 9:

किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए एक द्विआधारी संक्रिया $*: \mathrm{P}(X) \times \mathrm{P}(X) \to \mathrm{P}(X)$ पर विचार कीजिए, जो $A * B = A \cap B$ $\forall A, B \in \mathrm{P}(X)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $\mathrm{P}(X)$ समुच्चय X का घात समुच्चय है। सिद्ध कीजिए कि इस संक्रिया का तत्समक अवयव X है तथा संक्रिया $*$ के लिए $\mathrm{P}(X)$ में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है।

उत्तर 9:

दिया है: द्विआधारी संक्रिया $*: \mathrm{P}(X) \times \mathrm{P}(X) \to \mathrm{P}(X)$, जो $A * B = A \cap B \; \forall A, B \in \mathrm{P}(X)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $\mathrm{P}(X)$ समुच्चय X का घात समुच्चय है।

हम जानते हैं कि $A \cap X = A = X \cap A$ सभी $A \in \mathrm{P}(X)$ के लिए $\Rightarrow A * X = A = X * A$ सभी $A \in \mathrm{P}(X)$ के लिए

इस प्रकार, X इस संक्रिया का तत्समक अवयव है।

अब, कोई अवयव $A \in \mathrm{P}(X)$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि $B \in \mathrm{P}(X)$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$A * B = X = B * A$ [क्योंकि X तत्समक अवयव है]

अर्थात $A \cap B = X = B \cap A$

यह तभी संभव है जब $A = X = B$.

इस प्रकार, संक्रिया $*$ के लिए $\mathrm{P}(X)$ में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है। अतः, यह सिद्ध होता है।

प्रश्न 10:

समुच्चय $\{1, 2, 3, ..., n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

समुच्चय $\{1, 2, 3, ..., n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या वास्तव में, $1, 2, ..., n$ के कुल क्रमचयों की संख्या के बराबर है।

समुच्चय $\{1, 2, 3, ..., n\}$ से स्वयं तक के समस्त आच्छादक फलनों की संख्या $=1, 2, ..., n$ के कुल क्रमचयों की संख्या $= n$

प्रश्न 11:

मान लीजिए कि $S = \{a, b, c\}$ तथा $T = \{1, 2, 3\}$ है। S से T तक के निम्नलिखित फलनों F के लिए F^{-1} ज्ञात कीजिए, यदि उसका अस्तित्व है:

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ **(ii)** $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

उत्तर 11:

$S = \{a, b, c\}$, $T = \{1, 2, 3\}$

(i) यहाँ, $\mathrm{F}: S \to T$, $\mathrm{F} = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ द्वारा परिभाषित है। $\Rightarrow \mathrm{F}(a) = 3, \mathrm{F}(b) = 2, \mathrm{F}(c) = 1$

इसलिए, $\mathrm{F}^{-1}: T \to S$, जो $\mathrm{F}^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$ द्वारा परिभाषित है।

(ii) यहाँ, $\mathrm{F}: S \to T$, जो $\mathrm{F} = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$ द्वारा परिभाषित है।

क्योंकि $\mathrm{F}(b) = \mathrm{F}(c) = 1$, इसलिए F एकैकी नहीं है।

अतः, F व्युत्क्रमणीय नहीं है अर्थात F^{-1} का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 12:

$a * b = |a - b|$ तथा $a \circ b = a$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाओं $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तथा $\circ: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $*$ क्रमविनिमय है परन्तु साहचर्य नहीं है, o साहचर्य है परन्तु क्रमविनिमय नहीं है। पुनः सिद्ध कीजिए कि सभी $a, b, c \in \mathbf{R}$ के लिए, $a*(b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ है। [यदि ऐसा होता है, तो हम कहते हैं कि संक्रिया $*$ संक्रिया o पर वितरित होती है।] क्या o संक्रिया $*$ पर वितरित होती है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

उत्तर 12:

दिया है: $a * b = |a - b|$ तथा $a \circ b = a$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रियाएँ $*: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ तथा $\circ: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ हैं।

अवयव $a, b \in \mathbf{R}$ के लिए, $a * b = |a - b|$ और $b * a = |b - a| = |-(a - b)| = |a - b|$,

$\therefore a * b = b * a$

अतः, संक्रिया $*$ क्रमविनिमय है।

यहाँ, $(1 * 2) * 3 = (|1-2|) * 3 = 1 * 3 = |1-3| = 2$ और $1 * (2 * 3) = 1 * (|2-3|) = 1 * 1 = |1-1| = 0$
$\therefore (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$ जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{R}$.
अतः, संक्रिया * साहचर्य नहीं है।
अब, संक्रिया o के लिए, 1 o 2 = 1 और 2 o 1 = 2, $\therefore$ 1 o 2 ≠ 2 o 1 जहाँ $1, 2 \in \mathbf{R}$.
अतः, संक्रिया o क्रमविनिमय नहीं है।
माना, अवयव $a, b, c \in \mathbf{R}$, तब, $(a \text{ o } b) \text{ o } c = a \text{ o } c = a$ और $a \text{ o } (b \text{ o } c) = a \text{ o } b = a$
$\therefore a \text{ o } b) \text{ o } c = a \text{ o } (b \text{ o } c)$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$
अतः, संक्रिया o साहचर्य है।
अब, माना अवयव $a, b, c \in \mathbf{R}$, तो $a * (b \text{ o } c) = a * b = |a-b|$ और $(a * b) \text{ o } (a * c) = (|a-b|) o (|a-c|) = |a-b|$
अतः, $a * (b \text{ o } c) = (a * b) \text{ o } (a * c)$.
अब, $1\ o\ (2 * 3) = 1 o (|2-3|) = 1 o 1 = 1$ और $(1 \text{ o } 2) * (1 \text{ o } 3) = 1 * 1 = |1-1| = 0$
$\therefore 1 \text{ o } (2 * 3) \neq (1 \text{ o } 2) * (1 \text{ o } 3)$ जहाँ $1, 2, 3 \in \mathbf{R}$
अतः, संक्रिया o संक्रिया * पर वितरित नहीं होती है।

प्रश्न 13:

किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए मान लीजिए कि *: $P(X) \times P(X) \to P(X)$, जहाँ $A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि रिक्त समुच्चय Φ, संक्रिया * का तत्समक है तथा $P(X)$ के समस्त अवयव A व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि $A^{-1} = A$. (संकेत: $(A - \Phi) \cup (\Phi - A) = A$ तथा $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \Phi$).

उत्तर 13:

दिया है कि *: $P(X) \times P(X) \to P(X)$, जहाँ $A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है।
माना $A \in P(X)$. तब, $A * \Phi = (A - \Phi) \cup (\Phi - A) = A \cup \Phi = A$ और $\Phi * A = (\Phi - A) \cup (A - \Phi) = \Phi \cup A = A$
$\therefore A * \Phi = A = \Phi * A$ सभी $A \in P(X)$ के लिए
इस प्रकार, समुच्चय Φ संक्रिया * का तत्समक है।
अब, कोई अवयव $A \in P(X)$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि $B \in P(X)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि
$A * B = \Phi = B * A$. [क्योंकि समुच्चय Φ संक्रिया का तत्समक है]
यहाँ, $A * A = (A - A) \cup (A - A) = \Phi \cup \Phi = \Phi$ सभी $A \in P(X)$.
अतः, $P(X)$ का अवयव A व्युत्क्रमणीय है और $A^{-1} = A$ है।

प्रश्न 14:

निम्नलिखित प्रकार से समुच्चय {0, 1, 2, 3, 4, 5} में एक द्विआधारी संक्रिया * परिभाषित कीजिए

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि शून्य इस संक्रिया का तत्समक है तथा समुच्चय का प्रत्येक अवयव $a \neq 0$ व्युत्क्रमणीय है, इस प्रकार कि $6 - a$, a का प्रतिलोम है।

उत्तर 14:

माना $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
यहाँ, समुच्चय X में संक्रिया * इस प्रकार परिभाषित है कि $a * b = \begin{cases} a + b, & \text{यदि } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{यदि } a + b \geq 6 \end{cases}$
कोई अवयव $e \in X$ संक्रिया * एक तत्समक अवयव होगा यदि $a * e = a = e * a$ सभी $a \in X$ के लिए
प्रत्येक $a \in X$ के लिए,
$a * 0 = a + 0 = a$ $[a \in X \Rightarrow a + 0 < 6]$
$0 * a = 0 + a = a$ $[a \in X \Rightarrow 0 + a < 6]$
$\therefore a * 0 = a = 0 * a$ सभी $a \in X$ के लिए
अतः, संक्रिया * में 0 तत्समक अवयव है।

कोई अवयव $a \in X$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि $b \in X$ इस प्रकार है कि $a * b = 0 = b * a$.

अर्थात, $a * b = \begin{cases} a+b=0=b+a, & \text{यदि } a+b<6 \\ a+b-6=0=b+a-6, & \text{यदि } a+b \geq 6 \end{cases}$

$\Rightarrow a = -b$ या $b = 6 - a$

परन्तु, $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ और $a, b \in X$. तब, $a \neq -b$,

इसलिए $b = 6 - a$ सभी अवयवों a का व्युत्क्रम है, जहाँ $a \in X$ है।

अतः, सभी अवयवों $a \in X$, $a \neq 0$ के व्युत्क्रम $6 - a$ हैं अर्थात $a^{-1} = 6 - a$ है।

प्रश्न 15:

मान लीजिए कि $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ और $f, g: A \to B$, क्रमशः $f(x) = x^2 - x, x \in A$ तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$, $x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं। क्या f तथा g समान हैं? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए। (संकेत: नोट कीजिए कि दो फलन $f: A \to B$ तथा $g: A \to B$ समान कहलाते हैं यदि $f(a) = g(a)\ \forall\ a \in A$ हो।)

उत्तर 15:

दिया है: $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ और $f, g: A \to B$, क्रमशः $f(x) = x^2 - x, x \in A$ तथा $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ द्वारा परिभाषित फलन हैं।

इसलिए,

$f(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$ और $g(-1) = 2\left|(-1) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow f(-1) = g(-1)$

यहाँ, $f(0) = (0)^2 - (0) = 0$ और $g(0) = 2\left|0 - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(0) = g(0)$

इसीप्रकार $f(1) = (1)^2 - (1) = 1 - 1 = 0$ और $g(1) = 2\left|(1) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(1) = g(1)$

तथा $f(2) = (2)^2 - (2) = 4 - 2 = 2$ और $g(2) = 2\left|(2) - \frac{1}{2}\right| - 1 = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 3 - 1 = 2$

$\Rightarrow f(2) = g(2)$

$\therefore f(a) = g(a)$ सभी $a \in A$ के लिए

अतः, फलन f तथा g समान फलन हैं।

प्रश्न 16:

यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो ऐसे संबंध जिनमे अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हों और जो स्वतुल्य तथा सममित हैं किंतु संक्रामक नहीं हैं, कि संख्या है:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

उत्तर 16:

दिया है: समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$.

समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ में सबसे छोटा संबंध जिसमें अवयव (1, 2) तथा (1, 3) हों और जो स्वतुल्य तथा सममित तो हो किंतु संक्रामक नहीं हो, निम्नलिखित प्रकार से होगा:

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$

संबंध R स्वतुल्य है क्योंकि $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$.

संबंध R सममित है क्योंकि $(1, 2), (2, 1) \in R$ और $(1, 3), (3, 1) \in R$.

लेकिन संबंध R संक्रामक नहीं है क्योंकि $(3, 1), (1, 2) \in R$ परन्तु $(3, 2) \notin R$.

अब, यदि हम (3, 2) और (2, 3) (या दोनों) को संबंध R में शामिल कर लें तो संबंध R संक्रामक भी होगा।

अतः, कुल अभीष्ट संबंध संख्या में 1 ही होंगे।

अतः, विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 17:
यदि A = {1, 2, 3} हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधो की संख्या है।

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

उत्तर 17:
दिया है: समुच्चय A = {1, 2, 3}.

समुच्चय A = {1, 2, 3} में अवयव (1, 2) वाले सबसे छोटा तुल्यता संबंध

R1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}

इसके अतिरिक्त समुच्चय A = {1, 2, 3} में केवल चार युग्म ही बचे हैं अर्थात (2, 3), (3, 2), (1, 3) और (3, 1) हैं।

यदि हम एक युग्म, माना (2, 3), को R1 में शामिल कर लें, तो संबंध को सममित बनाने के लिए, हमें युग्म (3, 2) को भी शामिल करना होगा और साथ ही संक्रामक बनाने के लिए (1, 3) और (3, 1) को भी सम्मिलित करना होगा।

अतः, एकमात्र तुल्यता संबंध (जो R1 से बड़ा हो) सार्वत्रिक संबंध होगा।

इसप्रकार, अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधो की संख्या 2 है।

अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 18:
मान लीजिए कि f: **R** → **R** है तब निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित चिन्ह फलन है।

$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$ तथा g: **R** → **R**, $g(x)$ = [x], द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ [x], x से कम या x के बराबर पूर्णांक है, तो क्या fog तथा gof, अन्तराल (0, 1] में संपाती हैं?

उत्तर 18:
दिया है: $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$ तथा g: **R** → **R**, $g(x)$ = [x], द्वारा प्रदत्त महत्तम पूर्णांक फलन है, जहाँ [x], x से कम या x के बराबर पूर्णांक है।

यहाँ, माना $x \in (0, 1]$, तब

[x] = 1 यदि x = 1 और [x] = 0 यदि 0 < x < 1.

इसलिए,

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f([x]) = \begin{cases} f(1), & \text{यदि } x = 1 \\ f(0), & \text{यदि } x \in (0,1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x = 1 \\ 0, & \text{यदि } x \in (0,1) \end{cases}$$

और

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = g(1) = [1] = 1 \qquad \left[\text{क्योंकि } x > 0\right]$$

इसप्रकार, जब $x \in (0, 1)$, तो $fog(x)$ = 0 और $gof(x)$ = 1.

अतः, fog तथा gof, अन्तराल (0, 1] में संपाती नहीं हैं।

प्रश्न 19:
समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

उत्तर 19:
समुच्चय $\{a, b\}$ में एक द्विआधारी संक्रिया * एक फलन $\{a, b\} \times \{a, b\} \to \{a, b\}$ है।

अर्थात संक्रिया *, $\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \to \{a, b\}$ से एक फलन है।

समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या 2^4 है अर्थात 16 है।

अतः, विकल्प (B) सही है।